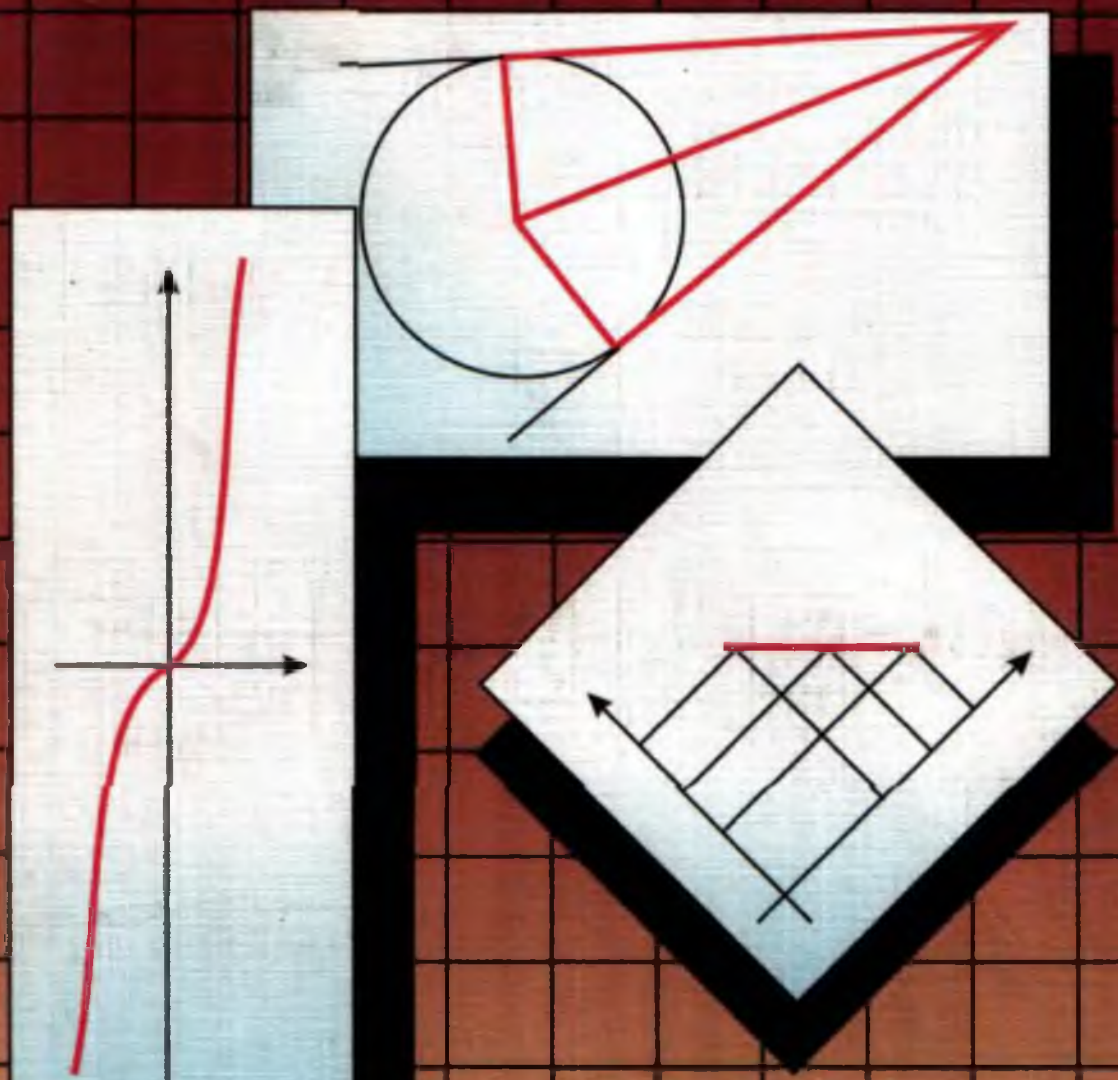
Г. П. БЕВЗ

Алгебра



7–9

Г. П. БЕВЗ

Алгебра

Пробный учебник для 7–9 классов
средней школы

Допущено Министерством образования Украины

Перевод с украинского

КИЕВ «ОСВІТА» 1998

ББК 22.14я72
Б36

Переведено по изданию:

Бевз Г. П. Алгебра: Проб. підруч. для 7—9 кл. серед. шк.— К.: Освіта, 1996.—303 с.

Допущено Міністерством освіти України

(Лист Міністерства освіти України № 3/11—48 від 8.09.1993р.)

Бевз Г. П.
Б36 Алгебра: Проб. підруч. для 7—9 кл. серед. шк.— Доп. М-вом освіти України.— К.: Освіта, 1998.— 319 с.

ISBN 966-04-0107-8.

ББК 22.14я72

ISBN 966-04-0107-8
ISBN 5-330-03161-3 (укр.)

© Г. П. Бевз, 1996
© Переклад, «Освіта», 1998

7 КЛАСС

Глава I

УРАВНЕНИЯ

§ 1. Общие сведения об уравнениях

Алгебра на протяжении многих столетий развивалась как наука об уравнениях[1].

Уравнение — это равенство, содержащее неизвестные числа, обозначенные буквами. Неизвестные числа в уравнении называются *переменными*. Переменные чаще всего обозначают буквами x, y, z (икс, игрек, зет), хотя можно обозначить их и другими буквами.

Пример уравнения: $13x - 30 = 7x$. Если в нем вместо переменной x написать число 5, получим верное числовое равенство $13 \cdot 5 - 30 = 7 \cdot 5$. Говорят, что число 5 удовлетворяет данному уравнению.

Число, которое удовлетворяет уравнению, называется его *корнем*, или *решением*.

Уравнение $13x - 30 = 7x$ имеет только один корень: $x = 5$.

Уравнение $x(x - 2)(x + 3) = 0$ имеет три корня: $x = 0$, $x = 2$, $x = -3$.

Уравнение $x + 7 = x$ не имеет корней, т. к. при каждом значении переменной x число $x + 7$ на 7 больше x.

Решить уравнение — это значит найти все его решения или показать, что они не существуют.

Простейшие уравнения можно решать на основании известных зависимостей между слагаемыми и суммой, между множителями и произведением и т. д.

Пример. Решите уравнение $31 - 3x = 19$.

Р е ш е н и е. В уравнении неизвестно вычитаемое.

---

[1] Исторические сведения о развитии алгебры есть на с. 293.

Чтобы найти его, нужно из уменьшаемого вычесть разность:

$$3x = 31 - 19, \text{ или } 3x = 12.$$

Здесь неизвестен множитель x. Чтобы найти его, нужно произведение разделить на известный множитель:

$$x = 12 : 3, \; x = 4.$$

О т в е т: $x = 4$.

Каждое уравнение имеет *левую* и *правую части*. Например, в уравнении $27 - 4x = 12$ разность $27 - 4x$ — левая часть, а число 12 — правая. $27, -4x, 12$ — *члены* этого уравнения.

Уравнение — это своеобразный кроссворд. Только в клеточки кроссворда предлагается вписывать буквы, чтобы выходили нужные слова, а в уравнение вместо переменных нужно подставлять числа, чтобы выходили правильные равенства. Например, уравнение $9x + 39 = 5 - 8x$ можно записать в форме числового кроссворда

$$9 \cdot \square + 39 = 5 - 8 \cdot \square .$$

Какое число нужно поставить в квадратики, чтобы получилось верное равенство?

1. Назовите левую и правую части уравнения:

а) $5x + 7 = 3x - 2$; б) $0{,}5x = 4{,}7x + 8$;

в) $4y + 12 = 0$.

2. Выпишите члены уравнения:

а) $21y - 15 = 7 + 2y$; б) $0{,}3x - 5 = 0$.

3. Объясните, почему не имеет решений уравнение:

а) $x + 3 = x$; б) $5 - z = 8 - z$.

Решите уравнения 4 — 6 .

4. а) $25 + x = 37$; б) $x - 12 = 23$;

в) $24 - x = 18$; г) $3{,}7 - x = 1{,}9$;

д) $1 = \frac{2}{3} + x$; е) $13 = 74 - x$.

5. а) $6x = 30$; б) $5y = 0$; в) $4z = -5$,
г) $2x + 3 = 19$; д) $3y - 4 = 1$; е) $1 - 3x = 25$.

6. а) $\frac{2}{3}x = 5$; б) $-\frac{5}{7}y = 1$; в) $1 - \frac{3}{4}x = \frac{5}{8}$.

7°. Покажите, что уравнение:

а) $x - 2 = 3x$ имеет решение $x = -1$;

б) $8z - 5 = 5z$ имеет решение $z = \frac{5}{3}$;

в) $2y + y = 5y$ имеет решение $y = 0$.

8. Покажите, что уравнение:

а) $x(x - 3) = 0$ имеет решения $x = 0$ и $x = 3$;

б) $z(z - 2)(z + 3) = 0$ имеет решения $z = 0$, $z = 2$ и $z = -3$.

9. Какие из чисел $-2, -1, 0, 1, 2$ удовлетворяют уравнению $x(3x - 1) = 0$?

Решите уравнения 10 — 11.

10. а) $2(x - 3) = 36$; б) $4(5 - x) = 12$;
в) $0{,}1(x + 1) = 1$; г) $(8 - z) \cdot 7 = 28$;
д) $2(3x - 5) = 20$; е) $3(1 - 2x) = 15$.

11. а) $4(x + 1) + 11 = 31$; б) $16 + 3(z - 2) = 1$;
в) $5(y - 3) - 12 = 73$; г) $47 + 2(x + 4) = 7$.

12. Я задумал число. Если его умножить на 3, от результата отнять 4, то будет 5. Какое число я задумал?

Р е ш е н и е. Обозначим искомое число буквой x. Если умножить его на 3, то будет $3x$. Отняв от результата 4, получим $3x - 4$. Составим уравнение: $3x - 4 = 5$.

Решим это уравнение:

$3x = 5 + 4$,

$3x = 9$, $x = 3$.

О т в е т. Я задумал число 3.

13. Если задуманное число умножить на 3 и к произведению прибавить 18, то получим 63. Найдите задуманное число.

° Упражнения обязательного уровня подготовки.

14. При каких значениях x числовое значение разности $35 - 2x$ равно 10?

15. Старинная египетская задача. Пастуха, ведущего 70 быков, спросили: «Какую часть быков своего стада ты ведешь?». Он ответил: «Я веду две трети от трети скота». Сколько быков было у пастуха?

§ 2. Равносильные уравнения

Рассмотрим два уравнения: $x - 3 = 2$ и $x + 7 = 12$. Каждое из них имеет одно решение: $x = 5$. Такие уравнения называются равносильными.

Два уравнения называются *равносильными*, если каждое из них имеет те же решения, что и другое. Равносильными считают и такие уравнения, которые не имеют решений, например $x + 5 = x$ и $2 - x = 3 - x$.

Чтобы решать сложные уравнения, нужно уметь заменять их более простыми и равносильными данным. Дальше покажем, как это делается.

Из распределительного закона умножения следует, что при любом значении x числа $2x + 5x$ и $7x$ равны. Поэтому равносильны такие, например, уравнения: $2x + 5x = 28$ и $7x = 28$.

Из распределительного закона следует, что при каждом значении x числа $3(x - 5)$ и $3x - 15$ равны. Потому равносильны и такие уравнения:

$$3(x - 5) + 7 = 16 \text{ и } 3x - 15 + 7 = 16.$$

Вообще, если в любой части уравнения привести подобные слагаемые или раскрыть скобки, то получим уравнения, равносильные данному.

Прибавив к обеим частям верного числового равенства одно и то же число, получим также верное равенство. Из этого следует: если, например, к обеим частям равенства $23y = 10y + 39$ прибавить по $-10y$, то получим уравнение $23y - 10y = 39$, равносильное данному. А прибавить по $-10y$ — это то же, что перенести из

правой части уравнения в левую член $10y$ с противоположным знаком, в результате получим уравнение, равносильное данному уравнению. Например, помножив обе части уравнения $-3x + 7 = 5$ на -1, получим уравнение $3x - 7 = -5$, имеющее тот же корень, что и данное. А если обе части уравнения $20x + 100 = 200$ разделим на 20, то получим более простое уравнение $x + 5 = 10$, равносильное данному.

Всегда верны такие основные свойства уравнений.

1. ***В любой части уравнения можно привести подобные слагаемые или раскрыть скобки.***

2. ***Любой член уравнения можно перенести из одной части уравнения в другую, поменяв его знак на противоположный.***

3. ***Обе части уравнения можно умножить или разделить на одно и то же число, отличное от нуля.***

В результате таких преобразований всегда получаем уравнение, равносильное данному.

Сформулированные свойства часто применяют для решения уравнений.

Пример. Решите уравнение $2(3 - 2x) = 16 + x$.

Р е ш е н и е. Раскроем скобки: $6 - 4x = 16 + x$.

Перенесем члены уравнения с неизвестными в левую часть, а известные — в правую: $-4x - x = 16 - 6$. Приведем подобные слагаемые: $-5x = 10$.

О т в е т: $x = -2$.

Второе свойство первым сформулировал узбекский математик IX в. М у х а м м е д а л ь-Х о р е з м и (Мухаммед из Хорезма). В те далекие времена отрицательные числа не считались настоящими. Поэтому, если в результате переноса отрицательного члена уравнения из одной части в другую этот член становился положительным, считалось, что он восстанавливался, переходил из ненастоящего в настоящий. Такое преобразование уравнений Мухаммед аль-Хорезми назвал восстановлением (аль-джебр). Свойство уничтожения одинаковых членов уравнения в обеих частях он назвал противопоставлением (аль-мукабала). Книга об этих

преобразованиях называлась «Китаб аль-джебр аль-мукабала» (Книга о восстановлении и противопоставлении). Позже эту книгу перевели на латынь, взяв для названия только ее второе слово, которое стали писать Algebr. Отсюда и пошло название науки — алгебра. Преобразование аль-джебр стало важным шагом в развитии алгебры, т.к. значительно упростило решение уравнений.

Мухаммед аль-Хорезми (783 — 850)

Равносильны ли уравнения 16 — 19?

16. а) $4x + 5x = 18$ и $9x = 18$;
б) $7x - x = 24$ и $6x = 24$.

17. а) $2(x + 3) = 16$ и $2x + 6 = 16$;
б) $0{,}4(y - 2) = 1{,}2$ и $0{,}4y - 0{,}8 = 1{,}2$.

18. а) $3(1 - 2m) = 0$ и $1 - 2m = 0$;
б) $2x + 3 = 13$ и $2x = 10$.

19. а) $5 + (x - 4) = 5$ и $x - 4 = 0$;
б) $(x - 5)(x + 1) = 0$ и $x - 5 = 0$.

20. Какие из уравнений равносильны уравнению $3x = 15$?

а) $6x = 30$; б) $9x = 45$;
в) $3x - 15 = 0$; г) $3x - 1 = 14$;
д) $3x + 5 = 20$; е) $3x + 15 = 18$.

21°. Решите уравнение:

а) $18x - 7x = 55$; б) $1{,}27y + 0{,}73y = -18$;
в) $\frac{1}{3}x + \frac{5}{6}x = 14$; г) $-\frac{7}{9}z + \frac{1}{3}z = 12$.

22. Перенесите члены с переменными из правой части в левую:

а) $12x - 3 = x + 2$; б) $15z + 8 = 2z$;
в) $\frac{1}{2}m - \frac{2}{3} = 3 - \frac{1}{2}m$; г) $5 - 2\frac{1}{3}z = \frac{2}{3}z + 8$.

23. Перенесите члены с переменными из левой части в правую:

а) $7x + 4 = 9x$; б) $38 - 2n = 2n$;

в) $1 - 0{,}5z = 1{,}5z$; г) $\frac{2}{5} + \frac{4}{5}y = y$.

24. Упростите уравнение:

а) $12y + 3 = y - 7$; б) $5x + 2x + 5 = 4x$;

в) $0{,}7 - 2c = 3c + 1{,}7$; г) $2{,}5 - 3x = x - 4{,}5$.

Решите уравнения 25 – 32.

25. а) $2x - x = 3x$; б) $5y + 6 = 2y$;

в) $0{,}8z - 1 = 0{,}3z$; г) $2 + 37t = 40t$;

д) $1 - 0{,}5c = 0{,}5c$; е) $3 + 4{,}7x = 4{,}7x$.

26. а) $3(x - 5) = 2x - 7$; б) $4(l - 0{,}9) = 1{,}2 + 2l$.

27. а) $\frac{1}{3}x = 12 - x$; б) $\frac{2}{3}y = 9 - y$;

в) $\frac{1}{6}z = \frac{1}{3}z$; г) $5y = -\frac{5}{8} + y$;

д) $\frac{2}{7}x + 8 = 8$; е) $-4c = \frac{1}{7} - \frac{1}{7}c$.

28. а) $\frac{1}{7}(x + 3) = \frac{5}{7}$ б) $\frac{1}{8}(5 - x) = \frac{1}{8}$.

29. а) $\frac{1}{5}(2x - 3) = 1$, б) $\frac{1}{9}(4 + 3x) = \frac{1}{3}$;

в) $\frac{3}{7}(2 - 3x) = \frac{1}{7}$.

30. а) $\frac{2x}{3} + \frac{7}{9} = 1$; б) $\frac{3c}{5} - \frac{c}{10} = 7$;

в) $\frac{n}{4} - \frac{3n}{8} = -2$.

31. а) $\frac{x - 4}{7} - \frac{3}{14} = \frac{2}{7}$; б) $\frac{z - 3}{5} + \frac{1}{30} = 1$;

в) $\frac{2}{9} + \frac{x - 2}{3} = \frac{5}{9}$.

32*. а) $\frac{x - 3}{3} - \frac{2x}{9} = 2$; б) $\frac{z}{5} + \frac{3z - 7}{15} = \frac{1}{3}$.

---

* Упражнения повышенной трудности.

33. Найдите число, если известно, что сумма частных от деления этого числа на 8 и на 12 равна 10.

34. Катер должен был пройти расстояние между городами со скоростью 15 км/ч, а шел со скоростью 12 км/ч и потому опоздал на 3 ч. Найдите расстояние между городами.

Р е ш е н и е. Пусть искомое расстояние равно x км. Катер прошел его за $\frac{x}{12}$ ч, а должен был пройти за $\frac{x}{15}$ ч. Так как шел он на 3 часа дольше, чем должен был, то

$$\frac{x}{12} - \frac{x}{15} = 3.$$

Решим это уравнение.

$$\frac{5x - 4x}{60} = 3,$$

$$\frac{x}{60} = 3, \quad x = 180.$$

О т в е т. Расстояние между городами равно 180 км.

35. С т а р и н н а я и н д и й с к а я з а д а ч а. Из четырех жертвователей второй дал вдвое больше первого, третий — втрое больше второго, четвертый — вчетверо больше третьего, а все вместе дали 132. Сколько дал первый?

36. С т а р и н н а я р у с с к а я з а д а ч а. Летели гуси, а навстречу им гусь: «Здравствуйте, сто гусей!». Ему ответили: «Нас не сто. Вот если бы — мы, да еще столько, и полстолько, и четвертая часть нас, вот тогда бы вместе с тобой нас было бы сто». Сколько летело гусей?

37*. Задача из б о л г а р с к о г о ф о л ь к л о р а. На вопрос, сколько весит его рыба, рыбак ответил: «Хвост весит 150 г, голова столько, сколько хвост и половина туловища, а туловище — сколько голова и хвост вместе». Сколько весит рыба?

§ 3. Линейные уравнения

Уравнение вида $ax = b$, где a и b — данные числа, называется *линейным уравнением* с переменной x. Числа a и b — *коэффициенты* данного уравнения: a —

коэффициент при переменной x, b — *свободный член* уравнения.

Если $a \neq 0$, то уравнение $ax = b$ называется *уравнением первой степени с одной переменной*. Его корень $x = \frac{b}{a}$. Каждое уравнение первой степени с одной переменной имеет один корень. Линейное уравнение может не иметь корней, иметь один корень или бесконечно много.

Например, уравнение $0x = 5$ не имеет корней, так как не существует числа, которое при умножении на 0 в произведении давало бы 5. Уравнение $0x = 0$ имеет бесконечно много корней, его удовлетворяет любое значение переменной x.

Решая уравнение, его сначала стараются упростить, привести к линейному. Делают это преимущественно в такой последовательности.

1. Избавляются от знаменателей (если они есть).
2. Раскрывают скобки (если они есть).
3. Переносят члены с переменными в левую часть уравнения, а остальные — в правую.
4. Приводят подобные слагаемые.

В результате таких преобразований получается уравнение, равносильное данному; его корни являются также корнями данного уравнения.

Пример 1. Решите уравнение

$$3(2x + 5) + x = 4x - 18.$$

Р е ш е н и е. $6x + 15 + x = 4x - 18,$

$$6x + x - 4x = -18 - 15,$$

$$3x = -33,$$

$$x = -11.$$

Если коэффициенты уравнения многозначные, его удобно решать, пользуясь микрокалькулятором или компьютером.

Пример 2. Решите уравнение

$$32{,}47x + 19{,}5 = 98{,}54.$$

Р е ш е н и е. $32{,}47x = 98{,}54 - 19{,}5,$

$$x = (98{,}54 - 19{,}5) : 32{,}47,$$

98,54 [−] 19,5 [+] 32,47 [=],

$x = 2{,}4342469$.

Найденное значение корня — приближенное. Точное значение пришлось бы записывать обыкновенной дробью. Ответ обычно округляют и записывают, например, так: $x \approx 2{,}43$.

38. Какие из приведенных ниже уравнений линейные, какие — первой степени?

а) $-4x = 16$; б) $8z = 0$;

в) $0x = 18$; г) $0x = 0$.

39. Приведите к линейному уравнению:

а) $2x + x - 7x + 3 = 8$; г) $4(2 + x) - x = 3x + 9$;

б) $y - 5y = 8 - y$; д) $-c + 31(2 - c) = 32c$;

в) $3x + 2(x + 7) = 2x$; е) $0{,}7 = 2(x + 3{,}5) - 2x$.

40. Решите уравнение $3(x - 5) + x = 4x - 18$.

Р е ш е н и е. $3x - 15 + x = 4x - 18$,

$3x + x - 4x = 15 - 18$,

$0x = -3$.

О т в е т. Уравнение решений не имеет.

Решите уравнения 41 — 47.

41. а) $4 - 3x = 8(1 - x)$;

б) $2 - 5y = 5(1 - 2y)$.

42°. а) $8(9 - 2x) = 5(2 - 3x)$;

б) $5(z + 3) = 8(10 - z)$.

43. а) $y - 1{,}08 = 0{,}2(5 + y)$;

б) $0{,}3(1 - c) = c + 0{,}04$.

44. а) $3(x + 4) + 6(11 - x) = 9$;

б) $8(1 - x) + 5(x - 2) = 2$.

45. а) $7(4 - t) + 3(t - 5) = 9t$;

б) $3(x + 1{,}5) + 2(3 + x) = -5$.

46. а) $8 + 3(x - 5) + x = 2(3 + 2x)$;

б) $z + 2(4 + z) = 3z + 8$.

47. а) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}(x - 2) = x$; б) $\frac{1}{2} + 2\left(\frac{1}{3}n + 1\right) = 3n$.

48. Решите уравнение, пользуясь микрокалькулятором:

а) $235x = 408$; б) $18{,}7y = 9{,}7$;

в) $-32{,}4z = 58{,}8$.

49. Найдите корни уравнения:

а) $492x + 317 = 923$ — с точностью до тысячных;

б) $2{,}38z - 5{,}87 = 3{,}41$ — с точностью до стотысячных.

50. Одно число больше другого на 6. Если первое умножить на 5, а второе на 4, то первое произведение будет больше второго на 40. Найдите эти числа.

51. Одно число больше другого в 6 раз. Если из большего числа вычесть 37, а к меньшему прибавить 73, то результаты будут равны. Найдите эти числа.

52. Одно из двух чисел составляет 0,6 другого и меньше его на 30. Найдите эти числа.

Р е ш е н и е. Пусть второе число равно x, тогда первое — $0{,}6x$. Их разность $x - 0{,}6x = 30$, отсюда $0{,}4x = 30$, $x = 30 : 0{,}4$, $x = 75$, $0{,}6 \cdot 75 = 45$.

О т в е т. 45 и 75.

П р о в е р к а. $75 - 45 = 30$, $45 : 75 = 0{,}6$. Задача решена верно.

53. В одном баке бензина в 2 раза больше, чем во втором, а если бы из первого перелили 160 л во второй, то в обоих бензина стало бы поровну. Сколько бензина в каждом баке?

54. В одном овощехранилище сначала было 75 т картофеля, а во втором — 21 т. В первое ежедневно привозили по 12 т картофеля, а во второе — по 21 т. Через сколько дней в этих овощехранилищах картофеля станет поровну?

55. На первом складе было 2200 т угля, а на втором — 2800 т. После того, как со второго склада вывезли угля в 5 раз больше, чем с первого, на обоих складах его стало поровну. Сколько угля вывезли с каждого склада?

§ 4. Решение задач с помощью уравнений

Чтобы решить задачу с помощью уравнения, сначала надо составить соответствующее этой задаче уравнение. Образно говоря, следует перевести задачу с обычного языка на язык алгебры. Как это можно делать, проиллюстрируем на нескольких задачах.

Задача 1. На двух токах 1000 т зерна. Сколько зерна на каждом току, если на первом его на 200 т меньше, чем на втором?

Р е ш е н и е. Пусть на первом току — x т зерна. Тогда на втором его $(x + 200)$ т, а на обоих $(x + x + 200)$ т. Имеем уравнение

$$x + x + 200 = 1000,$$

$$\text{откуда } 2x = 800, \quad x = 400, \quad x + 200 = 600.$$

О т в е т. 400 т и 600 т.

Составить уравнение часто помогают рисунок или схема (рис. 1).

Можно решить данную задачу и другими способами.

Если на втором току y т зерна, то на первом $(1000 - y)$ т (рис. 2). Так как на втором току зерна на 200 т больше, то

$$1000 - y + 200 = y, \quad \text{откуда } y = 600,$$

$$1000 - y = 400.$$

Попробуйте решить задачу еще иначе.

Решая задачи на движение, надо помнить, что при равномерном движении пройденное телом расстояние равно произведению скорости на время ($s = v\,t$). При этом все значения величин следует выражать в соответ-

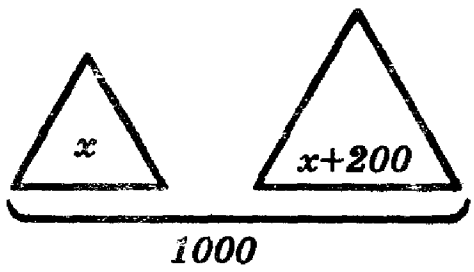


Рис.1

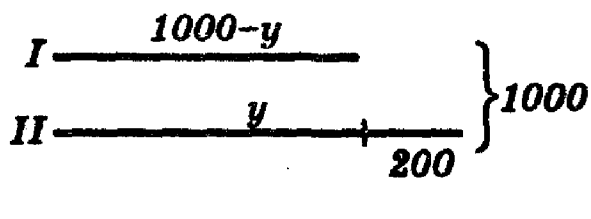


Рис.2

ствующих единицах измерения. Например, если время дано в часах, а расстояние в километрах, то скорость следует выражать в километрах в час. Если тело движется при наличии течения, то его скорость движения по течению (против течения) равна сумме (разности) его собственной скорости и скорости течения.

Задача 2. Катер прошел расстояние между пристанями по течению реки за 2 ч, а назад — за 3 ч. Найдите собственную скорость катера, если скорость течения реки 2 км/ч.

Р е ш е н и е. Пусть собственная скорость катера x км/ч. Тогда

$(x + 2)$ км/ч — его скорость по течению,

$(x - 2)$ км/ч — скорость катера против течения,

$(x + 2)\,2$ км — катер прошел по течению,

$(x - 2)\,3$ км — катер прошел против течения.

Расстояния $(x - 2)\,3$ и $(x + 2)\,2$ равны. Следовательно, получим уравнение

$$3\,(x - 2) = 2\,(x + 2),$$

откуда

$$3x - 6 = 2x + 4, \quad x = 10.$$

О т в е т. 10 км/ч.

56. Ученик задумал число. Если из него вычесть 7 и результат разделить на 3, то получим 5. Какое число задумал ученик?

57. Я задумал число. Если умножить его на 5, а произведение уменьшить на 18, получим половину задуманного числа. Найдите это число.

58. Сумма двух чисел равна 13,6, а разность 1,6. Найдите эти числа.

59. Сумма двух чисел равна 105, их отношение 1:2. Найдите эти числа.

60. Решите математический кроссворд, изображенный на рисунке 3.

Р е ш е н и е. В окружности следует вписать два числа, чтобы их сумма равнялась 200, а разность 10.

Если второе число обозначим буквой x, то первое будет равно $200 - x$. Их разность будет 10, следовательно,

$$200 - x - x = 10,$$

откуда $$2x = 190, \quad x = 95,$$

$$200 - x = 105.$$

О т в е т. Искомые числа 105 и 95.

61. Решите математические кроссворды, изображенные на рисунках 4 и 5.

62. Найдите число, половина которого больше его трети на 0,5.

63. Отец в 5 раз старше сына, а сын на 32 года моложе отца. Сколько лет каждому из них?

64°. Поле площадью 430 га разделено на две части так, что одна из них на 130 га больше другой. Найдите площадь каждой части.

65. Веревку длиной 84 м разрезали на две части, одна из которых в 3 раза длиннее другой. Найдите длину каждой части.

66. Веревку длиной 25 м разрезали на две части, одна из которых на 50% длиннее другой. Найдите длины этих частей веревки.

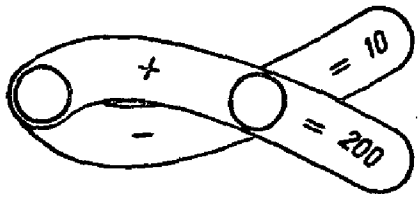


Рис.3

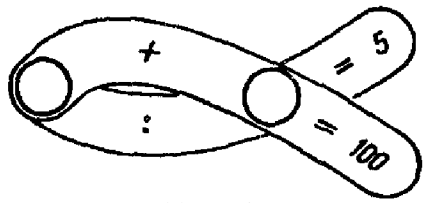


Рис.4

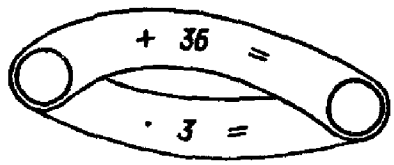


Рис.5

67. Оле с Митей — двадцать лет,
Оля старше втрое.
Сколько лет ей? Кто секрет
Нам ее раскроет?

68. Периметр прямоугольника равен 118 см, одна его сторона на 12 см длиннее другой. Найдите длины сторон прямоугольника.

69. Три тракториста вспахали вместе 72 га. Первый вспахал на 6 га больше второго, а второй — на 9 га больше третьего. Сколько гектаров вспахал каждый тракторист?

70. В трех классах всего 79 учеников. Во втором на 3 ученика больше, чем в первом, а в третьем на 2 меньше, чем в первом. Сколько учеников в каждом классе?

71°. В трех корзинах 54 кг яблок. В первой корзине на 12 кг меньше, чем во второй, а в третьей — вдвое больше, чем в первой. Сколько килограммов яблок в каждой корзине?

72. За книгу, альбом и карандаш заплатили 1,3 грн. Книга в 2 раза дороже альбома, а карандаш на 30 к. дешевле альбома. Сколько стоит альбом?

73. Поле площадью 860 га разделили на 3 участка так, что сумма площадей двух первых участков равна площади третьего, а площадь второго участка в 1,5 раза больше площади первого. Найдите площади участков.

74. Отцу 40 лет, а сы ' 10. Через сколько лет отец будет в три раза старше сына?

75. Старинная греческая задача. На вопрос, сколько учеников обучается в школе, Пифагор ответил: «Половина всех учеников изучает математику, четверть — музыку, седьмая часть молчит и, кроме того, есть еще три женщины». Сколько учеников было у Пифагора ?

76. Старинная индийская задача. Из букета цветков лотоса принесли в жертву: Шиве — третью часть, Вишну — пятую, Солнцу — шестую. Одну четверть получил Бхавани, а остальные 6 лотосов

отдали глубокоуважаемому учителю. Сколько было цветков в букете?

77. Скорость катера в стоячей воде 20 км/ч. Скорость течения реки 2 км/ч. Найдите расстояние между двумя пристанями, если рейс туда и обратно катер совершает за 5 ч.

78. Катер в стоячей воде проходит 15 км за час, скорость течения реки 2 км/ч. Найдите расстояние между двумя пристанями, если в одном направлении катер проходит его на полчаса быстрее, чем в противоположном.

79. Расстояние между двумя станциями поезд проходит со скоростью 70 км/ч на полчаса быстрее, чем со скоростью 60 км/ч. Найдите это расстояние.

80°. Пассажирский поезд за 3 ч проходит на 10 км больше, чем товарный за 4 ч. Скорость товарного поезда на 20 км/ч меньше скорости пассажирского. Найдите эти скорости.

81°. Велосипедист ехал 2 ч по грунтовой дороге и 1 ч по асфальтированной — всего 28 км. Найдите его скорость на каждом участке дороги, если по асфальтированной дороге он ехал со скоростью на 4 км/ч большей, чем по грунтовой.

82°. От станции до турбазы туристы шли со скоростью 4 км/ч, а обратно — со скоростью 5 км/ч и потому на тот же путь затратили времени на час меньше. Найдите расстояние от станции до турбазы.

83°. Бригада должна была выполнить задание по изготовлению деталей за 5 дней, а выполнила работу за 4 дня, так как изготавливала ежедневно на 12 деталей больше. Сколько деталей изготовила бригада?

84. Теплоход прошел расстояние между пристанями в одном направлении за 4 ч, а в противоположном — за 5 ч. Найдите расстояние между пристанями, если скорость течения реки равна 2 км/ч.

85. Вертолет пролетел расстояние между двумя городами при попутном ветре за 5,5 ч, а при встречном — за 6 ч. Найдите расстояние между городами и собственную скорость вертолета, если скорость ветра была 10 км/ч.

86. Старинная китайская задача. Несколько человек вместе покупают барана. Если каждый внесет по 5 монет, то не хватит до стоимости барана 45. Если каждый внесет по 7, то не хватит 3. Сколько стоит баран?

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Вариант 1

1. Решите уравнение:

а) $5x - 3 = 2x + 12$; б) $0{,}5y + 3\,(y - 2) = 2y$.

2. Матери 35 лет, а дочке 12. Через сколько лет дочка будет моложе матери вдвое?

Вариант 2

1. Решите уравнение:

а) $2 - 3x = 7x - 8$; б) $2z = 0{,}5\,(z - 1) + z$.

2. Отцу 42 года, а сыну 10. Когда отец был старше сына в 5 раз?

Вариант 3

1. Решите уравнение:

а) $2x - 4 = 3 - 5x$; б) $3 - 0{,}7\,(1 - 2n) = 6n$.

2. Сестре 7 лет, а брату 17. Когда сестра была (или будет) втрое моложе брата?

Вариант 4

1. Решите уравнение:

а) $x + 12 = 9 - 2x$; б) $c - 0{,}2\,(c - 3) = 5c$.

2. Брату 5 лет, а сестре 14. Когда брат был (или будет) моложе сестры вдвое?

Глава II

ЦЕЛЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

§ 5. Выражения с переменными

Рассмотрим, например, уравнение

$$\frac{2}{3}(x - 5) + 3x = 17 - 2x.$$

Левая и правая его части — *выражения*

$$\frac{2}{3}(x - 5) + 3x \quad \text{и} \quad 17 - 2x.$$

Каждое из этих выражений содержит одну переменную x. А бывают выражения с двумя, тремя и большим количеством переменных. Например, выражение $2ax + cx^2$ содержит три переменные: a, c и x.

В математике такие выражения играют очень важную роль. Математический язык — это язык выражений. Не случайно значительная часть школьного курса алгебры посвящена изучению выражений.

Бывают выражения и без переменных, например,

$$23 \cdot 17, \quad -\frac{3}{5} : 45, \quad \frac{0{,}2 \cdot 3 - 15 : 7}{2(3{,}5 - 1{,}8)}.$$

Такие выражения называются *числовыми*. Каждое числовое выражение (не содержащее деления на 0) имеет одно числовое значение. А вот выражение с переменными при различных значениях этих переменных может принимать различные значения.

Для примера найдем числовые значения выражения $3a + 5$, если a равно 1, 2, 3 и -4.

Если $a = 1$, то $3a + 5 = 3 \cdot 1 + 5 = 8$,
если $a = 2$, то $3a + 5 = 3 \cdot 2 + 5 = 11$,
если $a = 3$, то $3a + 5 = 3 \cdot 3 + 5 = 14$,
если $a = -4$, то $3a + 5 = 3 \cdot (-4) + 5 = -7$.

Результаты вычислений можно свести в таблицу:

a	1	2	3	– 4
$3a + 5$	8	11	14	– 7

Если выражение содержит несколько переменных, например $2a - 3x$, то для нахождения его числовых значений следует давать значение каждой переменной. Например, если $a = 7$ и $x = 5$, то $2a - 3x = 2 \cdot 7 - 3 \cdot 5 = -1$.

Если выражение не содержит никаких других действий, кроме сложения, вычитания, умножения, возведения в степень и деления, его называют *рациональным выражением*. Примеры рациональных выражений:

$$2x + n, \quad -\frac{2}{3}(x - 5), \quad \frac{a - c}{2a + c}, \quad a + \frac{1}{x + c}.$$

Рациональное выражение, не содержащее деления на выражение с переменной, называется *целым*. Два первых из указанных выше выражений — целые выражения, остальные — дробные. В этой главе мы будем рассматривать только целые выражения.

Выражения $a + b$, $a - b$, ab, $a : b$ — сумма, разность, произведение и частное переменных a и b. Читают их и так: «сумма чисел a и b», «разность чисел a и b» и т. д.

87. Запишите в виде числового выражения:

а) сумму чисел 5 и 7;

б) разность чисел 8 и – 3;

в) произведение чисел 15 и – 4;

г) отношение чисел 12 и 4.

Найдите числовые значения выражений 88 — 91.

88. а) $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} + 2{,}5$; б) $2{,}7 - \frac{3}{10} \cdot 7$;

в) $2\frac{1}{3} - \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{6}$.

89. а) $30{,}5 : 0{,}5 - 1976 : 32{,}5$;

б) $3{,}85 \cdot 5\frac{1}{7} + 69{,}25 : 27{,}7$.

90. а) $\left(1{,}75 : \frac{2}{3} - 1\frac{5}{8}\right) \cdot 16$;

б) $\left(5 - 11\frac{7}{8} : 2{,}5\right) : 0{,}0625$.

91. а) $\left(4{,}3 \cdot \frac{3}{43} + 11\frac{3}{5} \cdot 2{,}25\right) : 2{,}75$;

б) $\left(0{,}3 - \frac{3}{20}\right) \cdot 1{,}5 \cdot \left(1{,}88 + 2\frac{3}{25}\right)$.

92. Напишите:

а) сумму чисел a и x;

б) произведение чисел k и n;

в) полупроизведение чисел c и d;

г) полусумму чисел x и y;

д) полуразность чисел a и 5;

е) удвоенное произведение a и x.

93. Прочитайте выражение:

а) $m + n$; б) $m - n$; в) $1 + c$;

г) $2ax$; д) $\frac{1}{2}(x + y)$; е) $\frac{2}{3}(x - a)$;

ё) $c + \frac{a}{2}$; ж) $\frac{c + a}{2}$.

94. a и b — длины сторон прямоугольника. Что обозначают выражения ab, $2(a + b)$, $a + b$?

Найдите числовые значения выражений 95 — 98.

95. а) $2a + 5$ при $a = 2$;

б) $\frac{x}{2} + 3x$ при $x = -2$;

в) $2{,}3 - 3m$ при $m = 8$;

г) $-x + 7$ при $x = 0{,}7$.

96. а) $2a + 3c$ при $a = \frac{1}{3}$, $c = 0{,}5$;

б) $2(a + 3c)$ при $a = \frac{1}{3}$, $c = 0{,}5$;

в) $(2a + 3)c$ при $a = \frac{1}{3}$, $c = 0{,}5$.

97°. а) $0{,}5x + 1{,}7$ при $x = -5$;

б) $2a - b$ при $a = \frac{1}{4}$, $b = -\frac{1}{3}$.

98. а) $12x + 88x$ при $x = 0{,}39$;

б) $129ab - 29ab$ при $a = 9$, $b = 8$.

99. Заполните таблицу:

a	3	4	5	6	7	8	9
n	0	1	-1	2	-2	3	-3
$2a + 5n$							

100. Для каких значений x числовые значения выражений равны друг другу:

а) $2x + 5x$ и $2(x + 5)$;

б) $1 + 3(x - 5)$ и $(1 + 3x) - 5x$;

в) $\frac{4}{5}x + 0{,}2(x + 3)$ и $0{,}8x$;

г) $2{,}5x + 3(0{,}5x + 5)$ и $-0{,}5x$?

101. Напишите в виде выражения число, в котором:

а) a десятков и 6 единиц;

б) 5 десятков и b единиц;

в) m десятков и n единиц;

г) a сотен и c единиц.

§ 6. Выражения со степенями

В алгебре часто приходится иметь дело с выражениями, содержащими степени чисел или переменных.

Напомним, что *степенью* называется произведение нескольких равных множителей. Например,

$3 \cdot 3$ — *вторая степень* (или квадрат) числа 3,

xxx — *третья степень* (или куб) переменной x,

$cccccc$ — *шестая степень* переменной c.

Эти степени обозначают: $3 \cdot 3 = 3^2$, $xxx = x^3$, $cccccc = c^6$.

Возвести число 2 в десятую степень означает перемножить десять двоек:

$2^{10} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$. Следовательно, $2^{10} = 1024$.

Здесь 2 — основание степени, 10 — показатель степени, а 1024, или 2^{10} — десятая степень числа 2.

Число, возводимое в степень, называется *основанием степени*; число, показывающее, в какую степень возводится основание — *показателем степени*.

Степени a^2 и a^3 называются *квадратом* и *кубом* потому, что для нахождения площади квадрата длину его стороны возводят во вторую степень, а для нахождения объема куба длину его ребра возводят в третью степень.

Первой степенью любого числа договорились считать само это число: a^1 — то же самое, что и a. Показатель степени 1 не принято писать.

Основанием степени может быть и дробное число, и отрицательное. Например,

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{81},$$

$$(-0{,}2)^3 = (-0{,}2) \cdot (-0{,}2) \cdot (-0{,}2) = -0{,}008.$$

Чтобы возвести в степень отрицательное число, нужно возвести в эту степень модуль этого числа и перед результатом поставить знак плюс, если показатель степени четный, или минус, если показатель степени нечетный.

Не путайте слова «степень» и «ступень». Сложение и вычитание считаются действиями *первой ступени*, умножение и деление — *второй ступени*, возведение в степень — действие *третьей ступени*. Вычисляя значение выражения, сначала выполняют действия высшей ступени, потом — низшей. Действия одной и той же ступени выполняют в том порядке, в котором они записаны. Если выражение содержит скобки, то сначала находят значение выражения в скобках.

Пример. Найдите значение выражения

$$5a^2 + 27 : (a - 1)^3 \text{ при } a = -2.$$

Р е ш е н и е. Если $a = -2$, то значение данного выражения равно

$$5 \cdot (-2)^2 + 27 : (-3)^3.$$

$(-2)^2 = 4$, $(-3)^3 = -27$, $5 \cdot 4 = 20$, $27:(-27) = -1$,
$20 - 1 = 19$.

Ответ. 19.

С помощью микрокалькулятора возвести число в степень можно, умножив это число на себя несколько раз. Например, пятую степень числа 3,7 можно вычислить по такой программе:

3,7 [×] 3,7 [×] 3,7 [×] 3,7 [×] 3,7 [=]

или короче:

3,7 [×] [=] [=] [=] [=].

Микрокалькуляторы, имеющие клавиши [F] и [y^x] дают возможность делать это еще проще. 20-ю степень числа 1,2 на таком калькуляторе можно вычислить по такой программе:

1,2 [F] [y^x] 20 [=].

Сколько корней может иметь уравнение $x^5 = 0$? Только один: $x = 0$. Поскольку $0^5 = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$, то не существует такого числа x, отличного от 0, чтобы выполнялось равенство $xxxxx = 0$. Аналогично можно убедиться в том, что уравнение $x^5 = 1$ имеет только один корень $x = 1$, а уравнение $x^4 = 1$ имеет два корня: $x = 1$ и $x = -1$.

102. Вычислите:

а) 5^2, 2^5, 10^3, 100^3, 25^2, 1000^3;

б) $\left(\frac{1}{2}\right)^2$, $\left(\frac{2}{3}\right)^3$, $\left(\frac{1}{4}\right)^3$, $\left(\frac{3}{2}\right)^4$, $\left(\frac{7}{8}\right)^2$;

в) $(0,2)^3$, $(0,3)^2$, $(0,04)^3$, $(0,005)^2$;

г) $1,2^2$, $2,3^2$, $3,1^3$, $1,007^2$;

д) $(-2)^4$, $(-13)^2$, $(-2)^5$, $(-1)^{150}$, $(-1)^{105}$;

е) $(-3)^4$, $-(3^4)$, -3^4, $(-0,5)^2$, $-0,5^2$.

103. Вычислите:

а) $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2$;

б) $3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + 7^2$;

в) $(-2)^2 + (-2)^3 + (-2)^4 + (-2)^5 + (-2)^6$.

104. Вычислите:

а) $2 \cdot 6^2$; б) $\left(-2 \cdot \frac{1}{4}\right)^3$; в) $5 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2$; г) $-3^2 \cdot 2$.

105. Старинная египетская задача. У семи людей по семь кошек, каждая кошка съедает по семь мышей, каждая мышь съедает по семь колосков, из каждого колоска может вырасти по семь мерок ячменя. Как велики числа этого ряда и их сумма?

106. Верно ли равенство:

а) $3^2 + 4^2 = 5^2$; б) $15^2 + 16^2 = 17^2$;

в) $35^2 + 36^2 = 37^2$; г) $3^3 + 3^2 = 6^2$;

д) $4^3 + 6^2 = 10^2$; е) $97^2 - 96^2 = 97 + 96$?

107. Докажите, что:

а) $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$;

б) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 9^3 = 45^2$.

108. Вычислите площадь квадрата, если сторона его равна:

а) 3 см; б) 10 м; в) 8,5 км.

109. На картине художника Н. П. Богданова-Бельского изображен урок математики в школе прошлого века. Учитель предложил учащимся устно сократить дробь

$$\frac{10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2}{365}.$$

Попробуйте и вы выполнить это задание.

110. Прочитайте выражение:

а) $a^2 + b^2$; б) $(a + b)^2$;

в) $a^2 - b^2$; г) $(a - b)^2$.

111. Запишите выражение:

а) квадрат суммы чисел x и y;

б) сумма квадратов чисел x и y;

в) разность кубов чисел a и b;

г) куб разности чисел a и b;

д) сумма кубов чисел a и b;

е) куб суммы чисел a и b.

112. Найдите значение выражения:

а) $5a^3$ при $a = -0{,}2$;

б) $2x^2 - x^4 - 5$ при $x = -2$;

в) $a^3 + 3a^2$ при $a = 0{,}2$;

г) $3a^4 - a^2$ при $a = -1{,}2$;

д) $1 - (x - y)^3$ при $x = 2{,}5$ и $y = 3$.

113. Заполните таблицу:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2							
x^3							

114. Составьте таблицу значений выражения $x^4 + x^2$ для x, равных: $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$.

115. Пользуясь микрокалькулятором, вычислите:

а) $3{,}7^4$; б) $2{,}05^6$; в) $54{,}8 \cdot 3{,}97^3$; г) $4{,}87^5 : 345$.

Решите уравнения 116 — 120.

116. а) $x^7 = 0$; б) $x^8 = 0$; в) $15x^6 = 0$; г) $\frac{1}{7}x^9 = 0$.

117. а) $(x - 3)^5 = 0$; б) $(5 - y)^4 = 0$; в) $(2x + 4)^6 = 0$.

118. а) $x^3 = 1$; б) $y^5 + 1 = 0$; в) $z^6 - 1 = 0$.

119. а) $(y - 3)^8 = 1$; б) $(5 - x)^4 = -1$;
в) $1 + (x - 2)^6 = 0$.

120. а) $(x - 4)^5 = 1$; б) $(z + 8)^7 = -1$;
в) $(3x + 2)^8 = -1$.

121. Докажите, что уравнение $x^2 + 1 = 0$ не имеет корней.

Р е ш е н и е. Для любого значения x значение x^2 неотрицательное, а значение $x^2 + 1$ положительное, следовательно не равно 0.

122. Имеет ли решения уравнение:

а) $x^6 + 1 = 0$; б) $2y^4 + 5 = 0$;

в) $x^6 + x^2 + 3 = 0$?

§ 7. Тождественные выражения

Два выражения, соответствующие числовые значения которых равны при любых значениях переменных, называются *тождественно равными*, или *тождественными*.

Например, тождественно равными являются выражения $5a + 8a$ и $13a$, так как при каждом значении переменной a эти выражения имеют равные числовые значения. Это следует из распределительного закона умножения. Тождественно равны также выражения $7x - 2x$ и $5x$, $c + 2c + 3c$ и $6c$.

Два тождественно равных выражения, соединенные знаком равенства, образуют *тождество*. Примеры тождеств: $5a + 8a = 13a$, $2(x - 3) = 2x - 6$.

Тождеством является каждое равенство, выражающее известные законы действий:

$$a + b = b + a,\quad a + (b + c) = (a + b) + c,$$
$$ab = ba,\quad a(bc) = (ab)c,\quad a(b + c) = ab + ac.$$

Тождествами также принято считать правильные числовые равенства, например, $3^2 + 4^2 = 5^2$, $1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$. Однако пока мы будем говорить только о тождествах с переменными.

Если в тождестве вместо переменной всюду написать одно и то же выражение, то получим снова тождество. Например, если в тождестве $4(a - 2) + 8 = 4a$ переменную a заменить выражением $z + 3$, то получим равенство $4(z + 1) + 8 = 4(z + 3)$, являющееся также тождеством.

Замена данного выражения другим, тождественным ему, называется *тождественным преобразованием* выражения. Далее рассмотрим важнейшие тождественные преобразования выражений со степенями. Начнем с основного свойства степени.

Каким бы ни было число a и натуральные показатели степеней m и n, всегда $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

Доказательство.

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{aa \ldots a}_{m \text{ раз}} \cdot \underbrace{aa \ldots a}_{n \text{ раз}} = \underbrace{aa \ldots a}_{(m+n) \text{ раз}} = a^{m+n}.$$

Тождество $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ называют *основным свойством степени*. Из него следует, что ***при умножении степеней одного и того же числа показатели степеней складывают, а основание оставляют то же самое.***

Примеры. $3^2 \cdot 3^5 = 3^7$, $1{,}3^4 \cdot 1{,}3^5 = 1{,}3^9$, $x^8 \cdot x^5 = x^8$.

Каким бы ни было число a и натуральные показатели степени m и n, всегда $(a^n)^m = a^{nm}$.

Доказательство.

$$(a^n)^m = \underbrace{a^n \cdot a^n \cdot \ldots \cdot a^n}_{m \text{ раз}} = a^{\overbrace{n+n+\ldots+n}^{m \text{ раз}}} = a^{nm}.$$

Чтобы возвести степень в степень, нужно показатели степеней перемножить, а основание оставить то же самое.

Примеры. $(2^8)^4 = 2^{12}$, $(0{,}7^2)^5 = 0{,}7^{10}$, $(c^7)^3 = c^{21}$.

Для любых чисел a и b и натурального показателя степени n: $(ab)^n = a^n \cdot b^n$.

Доказательство. $(ab)^n = \underbrace{ab \cdot ab \cdot \ldots \cdot ab}_{n \text{ раз}} =$

$$= \underbrace{aa \ldots a}_{n \text{ раз}} \cdot \underbrace{bb \ldots b}_{n \text{ раз}} = a^n \cdot b^n.$$

Следовательно, n-я степень произведения равна произведению n-ых степеней множителей.

Примеры. $(2 \cdot 3)^4 = 2^4 \cdot 3^4$, $(3m)^6 = 3^6 m^6$.

123. Тождественны ли выражения:

а) $ax + ax + ax$ и $3ax$; б) $x + x^2 + x^3 + x^4$ и x^5;

в) $p^3 p$ и p^4; г) $-a^2$ и $(-a)^2$;

д) $a - c$ и $c - a$; е) $x - 2a$ и $-2a + x$;

ё) $a^2 + b^2$ и $(a + b)^2$; ж) $a + c^2$ и $(a + c)^2$?

124. Сравните соответствующие числовые значения выражений x^3 и x при $x = -1$, $x = 0$ и $x = 1$. Тождественны ли эти выражения?

125. Заполните таблицу:

x	-2	-1	0	1	2
$x^5 - 5x^3 + 5x$					

Тождественны ли выражения $x^5 - 5x^3 + 5x$ и x?

126. В тождестве $2x + 3x = 5x$ замените переменную x выражением $a - b$. Будет ли полученное равенство тождеством?

127. Равенство $(a + b)\,c = ac + bc$ — тождество. Является ли тождеством равенство $(a + b)\,(m - n) = a\,(m - n) + b\,(m - n)$?

Упростите выражения 128 — 129.

128. а) $3^5 \cdot 3^7$; б) $12^4 \cdot 12^3$;

в) $\left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3$; г) $(-4)^2 \cdot (-4)^3$;

д) $0{,}4^2 \cdot 0{,}4^3$; е) $\left(-\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^3$.

129. а) $x^5 \cdot x^8$; б) $m^3 \cdot m^7$; в) $a \cdot a^8$;

г) $f^4 \cdot f$; д) $c^3 \cdot c^4 \cdot c^5$; е) $z^2 \cdot z^5 \cdot z$.

130. Найдите: а) третью степень числа 3^2; б) четвертую степень числа $(-2)^8$; в) седьмую степень числа $(-1)^{13}$.

131°. Выполните действия: а) $x^5 \cdot x^3$; б) $(a^2)^4$; в) $(ab)^6$.

132. Положительное или отрицательное значение выражения:

а) $(-5)^7 \cdot (-8)^5$; б) $(-4)^8 \cdot (-13)^{10}$;

в) $(-61)^{12} \cdot (-7)^{17}$?

133°. Вычислите: а) $(3^3 - 23)^2$; б) $(0{,}025 - 0{,}3^2)^2$.

134. Вычислите: а) $0{,}5^7 \cdot 2^7$; б) $(-4)^{12} \cdot (-0{,}25)^{12}$.

Решите уравнения 135 — 137.

135. а) $15x^4 = 0$; б) $4x^2 = x^2$; в) $16(x + 5)^2 = 0$.

136. а) $2x^3 = 2$; б) $(x - 3)^7 = 1$; в) $4(x + 5)^3 = 4$.

137. а) $z^3\,z = 0$; б) $4x^5\,x^6 = 0$; в) $y^5\,y^2 = 1$.

138. Имеет ли решения уравнение:

а) $x^2\,x^4 = -1$; б) $x^3\,x^5 = -1$;

в) $x^7 \cdot 0 = 0$; г) $0 \cdot x^8 = 1$;

д) $(x - 3)^4 = -1$; е) $18z^4 = -1$?

§ 8. Одночлены

Простейшие выражения — числа, переменные, их степени и произведения, например 6, $-\frac{7}{12}$, z, x^5, $0{,}3a^2x$, $3a \cdot 5c$, называются *одночленами*.

Если одночлен содержит только один числовой множитель, к тому же стоящий на первом месте, и если каждая переменная входит только в один множитель, такой одночлен называется *одночленом стандартного вида*. Такими являются, например, все указанные выше одночлены, кроме последнего. Одночлены $3a \cdot 5c$, $2x^3x^2$, $ab \cdot 8$ записаны не в стандартном виде: первый содержит два числовых множителя 3 и 5, второй содержит два множителя x^3 и x^2 одной и той же переменной x, в третьем числовой множитель 8 стоит не на первом месте.

Каждый одночлен можно записать в стандартном виде. Например,

$3a \cdot 5c = 3 \cdot 5 \cdot a \cdot c = 15\,ac$,

$0{,}5xy \cdot 4y^3 = 0{,}5 \cdot 4 \cdot x \cdot y \cdot y^3 = 2xy^4$,

$4cx\,(-2cx^3) = 4 \cdot (-2) \cdot c \cdot c \cdot x \cdot x^3 \qquad -8c^2x^4$.

Числовой множитель одночлена, записанного в стандартном виде, называется *коэффициентом* этого одночлена. Например, коэффициенты одночленов $15\,xz$, $-8{,}3a^2$, m^3, $-p$ равны соответственно 15, $-8{,}3$, 1 и -1. Коэффициенты 1 и -1 не принято писать.

Иногда возникает необходимость перемножить несколько одночленов. Для этого соединяют их знаком умножения, а образованный таким способом одночлен приводят к стандартному виду. Например, найдем произведение одночленов $5a^2\,b$ и $-0{,}2ab^3$.

$5a^2\,b\,(-0{,}2ab^3) = 5 \cdot (-0{,}2)\,a^2abb^3 = -a^3b^4$.

Подобным способом можно возводить одночлены в степень. Для примера возведем в третью степень одночлен $2ax^5$.

$$(2ax^5)^3 = 2ax^5 \cdot 2ax^5 \cdot 2ax^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot a \cdot a \cdot a \times$$
$$\times\, x^5 \quad x^5 \cdot x^5 = 8a^3x^{15}.$$

Из тождества $(ab)^n = a^n b^n$ следует такое правило.

Чтобы возвести в степень одночлен, нужно возвести в эту степень каждый множитель одночлена и найденные степени перемножить.

Примеры. $(3my^2)^4 = 3^4 \cdot m^4 \cdot (y^2)^4 = 81m^4y^8$.

$\left(-\frac{1}{3}a^2x^3\right)^4 = \left(-\frac{1}{3}\right)^4 \cdot (a^2)^4 \cdot (x^3)^4 = \frac{1}{81}a^8x^{12}$.

139. Какие из указанных выражений одночлены:

а) $\frac{2}{3}abc^3$; б) $(a+b)x$; в) $c^2 - y^2$;

г) $-3{,}5$; д) $(a+1)^3$; е) $t^{125} : z$?

140. Выпишите одночлены стандартного вида:

а) $3mn^3m^4$; б) $-3xyz^5$; в) $3ab \cdot 7c$;

г) $\frac{1}{2}c$; д) $2x\left(-\frac{1}{2}y\right)$; е) $abcdef$.

141. Запишите одночлены в стандартном виде:

а) $2a \cdot 3b$; б) $12ax \cdot a^2$; в) $-5cz \cdot cz$;

г) $0{,}3a \cdot 2ab^2$; д) $\frac{1}{3}mn \cdot 3n^2$; е) $(-2ab) \cdot (-3)$;

ё) $a^2 \cdot 3bc \cdot a^3$; ж) $-3 \cdot (-5)xy$; з) $\frac{1}{3}x \cdot x^2 \cdot 1\frac{1}{2}x^3$.

142. Найдите коэффициенты одночленов:

а) $2na^3$; б) xy^2z^3; в) $-ab^3c$;

г) $\frac{2}{3}a^2 \cdot x^3$; д) $-2xy \cdot 3x^2$; е) $-\frac{1}{4}mt^2 \cdot (2t^3)$.

143°. Вычислите значения одночленов:

а) $2a^4b$ при $a = -1$, $b = 5$;

б) $-x^2y^3$ при $x = 0{,}2$, $y = -3$;

в) $-0{,}5xc^3$ при $x = -0{,}2$, $c = -\frac{1}{2}$.

Перемножьте одночлены **144 — 145.**

144. а) $2ab$ и $3a^2c$; б) $0{,}3xy^2$ и $\frac{1}{3}x^2y$;

в) $-am^2$ и $3m^3p$; г) $0{,}2xy$ и $-5xy$;

д) $abcd$ и $-ab^2c^3$; е) $1\frac{2}{3}ax$ и $\frac{3}{5}z$.

145. а) $3a^3$, $2a^2z$ и $6az^3$; б) $2y$, $-3y^2$ и y^3;

в) $\frac{2}{5}x^5y^4z$, $-\frac{5}{7}xz^3$ и $-\frac{7}{2}$; г) $-2x$, $-2x$ и $-2x$.

146°. Возведите в квадрат одночлены:

а) $2ax$; б) $-3a^2$;

в) $0{,}2x^3m$; г) $-\frac{1}{2}x^5c^2$.

Упростите выражения 147 — 149.

147. а) $(3ax^2)^3$; б) $(x^3y^3)^4$;

в) $(-2a^2b)^3$; г) $(-\frac{1}{3}pq^2)^4$.

148°. а) $-3xy^3 \cdot 2xy^2$; б) $(-2a^2b)^3$;

в) $(x^3y^2)^4$.

149. а) $2a(3mc)^2$; б) $\frac{1}{8}c^2(-2xc)^3$;

в) $(-2a^2)^3 \cdot a^3$; г) $-0{,}7y^3(-\frac{1}{7}y^3)^2$;

д) $2x^2(-3x^3y)^2$; е) $(-3b^3c)^3 \cdot 2b$;

ё) $(xz^3)^2 \cdot (zx^3)^4$; ж) $(-2x)^3 \cdot (-3x)^2$;

з) $(x^2y^3)^4 \cdot (-\frac{2}{3}x)^2$.

150. Имеет ли решения уравнение:

а) $x^3 \cdot x^5 = -1$; б) $-2x^4 \cdot x^2 = 2$; в) $3x^3 \cdot x = 3$?

151. Решите уравнение:

а) $4x^2(-5x) = 0$; б) $(0{,}5x)^3 = 0{,}125$; в) $5y^4 + 5 = 0$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Вариант 1

1. Вычислите: а) $\left(-\frac{2}{3}\right)^4$; б) $1{,}7^2 - 8 \cdot 0{,}5^3$.

2. Возведите в квадрат выражение $0{,}3ax^3$.

3. Упростите выражение $(-2ac^2)^2 \cdot (0{,}5a^2x)^3$.

4. Найдите число, половина которого больше его пятой части на 2,8.

Вариант 2

1. Вычислите: а) $\left(-\frac{3}{4}\right)^3$; б) $2{,}1^2 - 8 \cdot 0{,}5^4$.

2. Возведите в квадрат одночлен $-5cz^3$.

3. Упростите выражение $(3am^2)^3 \cdot \left(-\frac{2}{3}xm^4\right)^2$.

4. Найдите число, третья часть которого больше его пятой части на 3,6.

Вариант 3

1. Вычислите: а) $\left(-\frac{4}{5}\right)^3$; б) $3{,}7^2 - 4 \cdot 0{,}5^3$.

2. Возведите в куб одночлен $-1{,}2ac^2$.

3. Упростите выражение $(-0{,}5ac^2)^2 \cdot (4a^2x)^3$.

4. Найдите число, шестая часть которого меньше его половины на 1,5.

Вариант 4

1. Вычислите: а) $\left(-\frac{3}{5}\right)^3$; б) $2{,}3^2 - 27 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2$.

2. Возведите в куб одночлен $-0{,}8x^2y$.

3. Упростите выражение $(-0{,}4x^3)^2 \cdot (-10ax^2)^3$.

4. Найдите число, седьмая часть которого меньше его половины на 3,5.

§ 9. Многочлены

В математике часто приходится складывать или вычитать одночлены. Например, $7x + 2a$ — сумма, а $7x - 2a$ — разность одночленов $7x$ и $2a$. Выражение $7x - 2a$ можно считать также суммой одночленов $7x$ и $-2a$, так как $7x + (-2a) = 7x - 2a$. Выражение $2x^4 - 3x^3 + x^2 - 9x - 2$ — сумма одночленов $2x^4$, $-3x^3$, x^2, $-9x$ и -2.

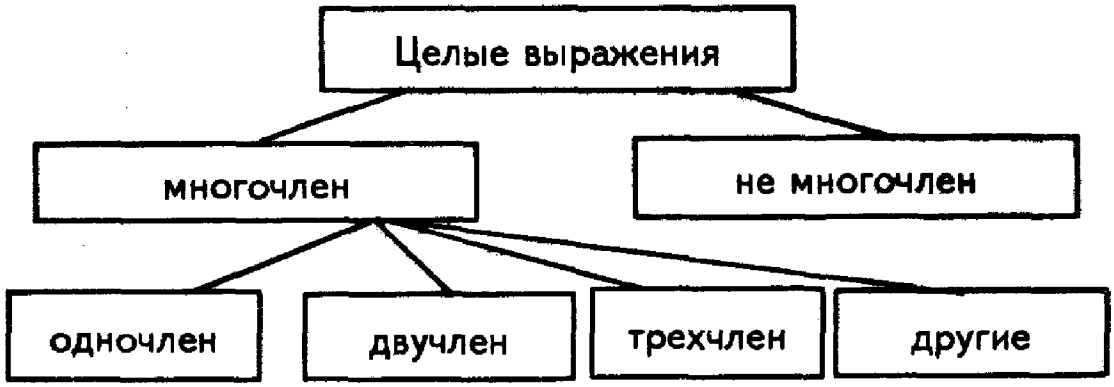
Сумма нескольких одночленов называется *многочленом*.

Каждое слагаемое многочлена называется его *членом*. Например, многочлен $2xy - 5x + 6$ содержит три члена: $2xy$, $-5x$ и 6.

Многочлен, содержащий два или три слагаемых, называется соответственно *двучленом* или *трехчленом*. Одночлен также считается отдельным видом многочлена.

Существуют ли целые выражения, не являющиеся многочленами? Существуют. Например, выражения

$(a + b)^2$, $2a - (b + x)^3$ целые, но не **многочлены. Связи** между упомянутыми выражениями можно проиллюстрировать такой схемой.



Многочлен может иметь *подобные члены*, то есть такие слагаемые, которые отличаются только коэффициентами или совсем не отличаются. Например, у трехчлена $4x + 7x - 5$ первые два члена подобны; приведя их, получим двучлен $11x - 5$, тождественно равный данному трехчлену.

Считают, что многочлен записан в *стандартном виде*, если все его члены — одночлены стандартного вида, и среди них нет подобных. Например, два первых многочлена

$$x^3 - 2x^2 + 3x + 7,\ ab + bc - ca,\ 2ax - 3a \cdot 5x + 8$$

стандартного вида, а третий — нет. На основании законов действий (см. § 7) каждый многочлен можно представить в стандартном виде, например:

$$2ax - 3a \cdot 5x + 8 = 2ax - 15ax + 8 = -13ax + 8.$$

Члены многочлена можно записывать в различной последовательности, преимущественно их упорядочивают по убывающим показателям той или иной переменной. Например, упорядочив многочлен $5ax^2 + 6x^3 - 4a^2x + a^4$ по убывающим степеням переменной x, получим $6x^3 + 5ax^2 - 4a^2x + a^4$. Наибольший показатель степени переменной x здесь 3, поэтому такой многочлен называют многочленом третьей степени

относительно x. Его можно упорядочить и по убывающим степеням переменной a: $a^4 - 4a^2x + 5ax^2 + 6x^3$. Это — многочлен четвертой степени относительно переменной a.

152. Найдите сумму одночленов:

а) $2a$ и $3b$; б) $-a$ и a^2;

в) $3c$ и $-2y$; г) $-4x$ и $2x$;

д) $-0{,}5$ и $0{,}5x$; е) q^3 и $-\frac{1}{3}q^3$.

153. Найдите разность одночленов:

а) $2a$ и $3x$; б) $-m$ и $5c$;

в) $-4p$ и $2p$; г) $-4{,}7x$ и 5;

д) $-3a^2x$ и $-8a^2x$; е) a и $-a$.

154. Тождественны ли выражения:

а) $3x^2 + 0{,}3x^2$ и $3{,}3x^2$; б) $-y + 2y^2$ и y^2;

в) $x^3 + x^2 - x^3$ и x^2; г) $a^2 + a^3$ и a^5?

155. Какие из данных выражений многочлены:

а) $2x - 3$; б) $37am^2$; в) $x^2 - 3x + \frac{5}{x}$;

г) $cy\,(x - y)$; д) -21; е) $(3 - 2x)^2$?

156. Суммой каких одночленов является многочлен:

а) $ax - cx^2 + 3$; б) $-2x^2 + 3x - 7$; в) $-m^2 - n^2$?

157. Найдите значение многочлена:

а) $x^2 - 5x + 6$ при $x = 2$;

б) $0{,}7x^2 + 0{,}3x^2$ при $x = 0{,}5$;

в) $2{,}8a - 1{,}8a^2$ при $a = -0{,}2$.

158. Найдите значение многочлена:

а) $m^3 - n^2$ при $m = 2$, $n = -3$;

б) $s + 2t^2 - 4$ при $s = 2{,}3$, $t = 0{,}5$.

159. Назовите многочлены стандартного вида:

а) $2x + 3a - 5$; б) $a^2 - a + 5a + b$;

в) $-x + 3xa - a + a^2$; г) $m - n + m - n^2$.

160. Запишите в стандартном виде многочлен:

а) $a - b + 3a + 2b^2$; б) $7x - y^2 + 5xy - 2x \cdot 3y$;

в) $37 - z^3 + 3t - 35z^3$; г) $x + x^2 + x^3 - 2x^2 - x$;

д) $\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}a \cdot 3c - ac$; е) $-105p + 15q + 10p \cdot 10{,}5$.

161. Запишите по убывающим степеням x многочлен:

а) $3x^4 - 5x^2 - x^3 - 2x$; б) $1 - x^2 + px - qx^3$;

в) $ax + bx^2 + cx^3 + dx^4$; г) $1 - x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x$.

162. Найдите степень многочлена относительно переменной z:

а) $3az^3 - bz$; б) $m^3z^5 - mz^5$;

в) $0{,}7xz + 8x^2z + 5$; г) $3z - z^3 + 27pz$.

163. Определите площадь фигуры, изображенной на рисунке 6, если каждое из четырех ее отверстий — квадрат со стороной, равной c.

164. Определите периметр фигуры, изображенной на рисунке 7, если $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$.

165. Два велосипедиста выехали из пунктов A и B навстречу друг другу. Найдите расстояние между A и B, если они ехали со скоростями a км/ч и b км/ч, а встретились через t ч.

Р е ш е н и е. 1-й с п о с о б. За t ч первый велосипедист проехал at км, а второй bt км. Следовательно, все расстояние равно $(at + bt)$ км.

2-й с п о с о б. За час велосипедисты сближались на $(a + b)$ км, за t ч они сблизились на $(a + b)\,t$ км. Это и есть искомое расстояние.

166. Запишите в виде многочлена число, имеющее a сотен, b десятков и c единиц.

167. Какое число от умножения на 7 увеличивается на 30?

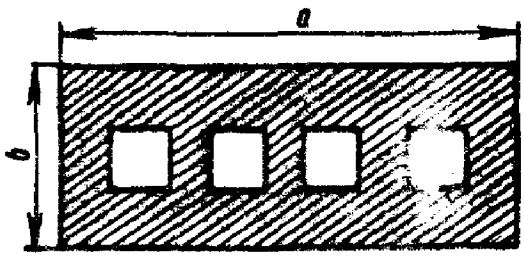


Рис. 6

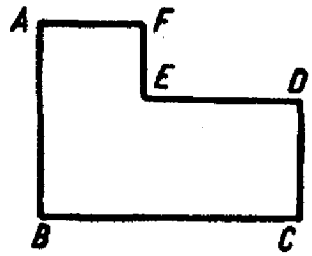


Рис. 7

168. Какое число от деления на 6 уменьшается на 12?

169. В двух канистрах 38 л бензина, причем в одной на 6 л меньше, чем в другой. Сколько бензина в каждой канистре?

170. Для изготовления бронзы берут 17 частей меди, 2 части цинка и одну часть олова. Сколько килограммов меди, цинка и олова следует взять для изготовления 200 кг бронзы?

§ 10. Сложение и вычитание многочленов

Чтобы *сложить* два многочлена, достаточно соединить их знаком плюс. Например, суммой многочленов $a^2 + ax + x^3$ и $c^2 + cx + x$ является многочлен $a^2 + ax + x^3 + c^2 + cx + x$. Если в полученной сумме есть подобные члены, их следует привести. Также складывают три и более многочленов.

Пример 1. Сложите многочлены $x^2 + 2x + 4$, $3x^2 - 4$ и $3 - 2x$.

Р е ш е н и е.

$$x^2 + 2x + 4 + 3x^2 - 4 + 3 - 2x = 4x^2 + 3.$$

При сложении многочленов имеют место переместительный и сочетательный законы: какими бы ни были многочлены A, B и C, всегда $A+B=B+A$ и $(A+B)+C=A+(B+C)$.

Найти *разность* двух многочленов это значит — из первого вычесть второй. Выполняя такое задание, после первого многочлена пишут знак минус и заключенный в скобки второй многочлен. Раскрывая скобки, перед которыми стоит знак минус, знаки всех членов, находящихся в скобках, меняют на противоположные.

Пример 2. Найдите разность многочленов $ab + c - 4$ и $2ab + c - 3$.

Р е ш е н и е. $ab + c - 4 - (2ab + c - 3) = ab + c - 4 - 2ab - c + 3 = -ab - 1$.

И сумма, и разность произвольных многочленов — многочлены.

171. Сложите многочлены:

а) $2ab + c$ и $2c^2 - c + 3$;

б) $2x^3 - 3x^2 - 4x + 5$ и $x^2 + 5x - 6$;

в) $n^3 + m^2n$ и $m^2n - n^3 - 4$;

г) $0{,}7z - 2{,}6z^2 + z^3$ и $2{,}3z^3 + 0{,}3z - 2$;

д) $-\frac{2}{3}mx - \frac{3}{5}m^2x$ и $2\frac{1}{3}mx - \frac{3}{5}m^2x^2 - 1\frac{1}{2}x^2$;

е) $0{,}8x^3 + 1{,}2x^2 - 3$, $4{,}5x^2 - x - 0{,}3$ и $0{,}2x^3 - 1{,}2x^2 + 3{,}3$.

172. Найдите разность многочленов:

а) $2x^2 + 3x + 1$ и $x^3 + 3x$;

б) $9m^3 + 2m + 5$ и $4m^3 - m + 6$;

в) $-\frac{1}{2}a + b^2$ и $3a - \frac{1}{2}b^2 - a^2$;

г) $-2xc^2$ и $0{,}25xc^2 - 2x^2$;

д) $-4a^3b + 3a^2b^2$ и $3a^3 - b^3 + 3a^2b^2 - 4ab^3$;

е) $-\frac{2}{3}xy - \frac{3}{5}x^2y$ и $2\frac{1}{3}xy - x^2y - 2\frac{1}{2}y^2$.

Упростите выражения 173 — 175.

173°. а) $7x^2 - 2x + (5 + 11x - 6x^2)$;

б) $8ab + 7b - (4ab + 7b - 3)$.

174. а) $1 - a + 3a^2 + 4a^3 + (-a^2 - 3a^3)$;

б) $x - 2xy + 3xy^2 + (4xy^3 + 2xy - 3x)$;

в) $(2az - 3z^2) + (-az - z^2) + (-5az)$.

175. а) $36cx^2 + 18c^2x - (13c^2x - 16cx^2 - x)$;

б) $-z^3 + 3mz - 2 - (2 + z - 3mz)$;

в) $2\frac{1}{3}az^2 - \left(\frac{2}{3}a^2z - 2\frac{1}{6}az^2 - 1\frac{5}{6}z^3\right)$.

176. Вычислите значение выражения:

а) $c^3 - 2c^2 + 3c - 4 - (c^3 - 3c^2 - 5)$ при $c = 2$;

б) $4x^2 - (-2x^3 + 4x^2 - 5)$ при $x = -3$;

в) $2p - (1 - p^2 - p^3) - (2p + p^2 - p^3)$ при $p = \frac{2}{3}$.

177. Какой многочлен нужно сложить с $3y^4 - 2y^2 + 5$, чтобы получить многочлен $5y^4 + y^3 - 2y^2 + 8$?

178. Какой многочлен нужно вычесть из $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$, чтобы получить многочлен $3x + 1$?

179. Решите уравнение:

а) $(2x + 3) + (4x - 8) = 37$;

б) $5 - 3z - (3 - 4z) = 42$;

в) $0{,}7 + x - (-0{,}7 + 4x) = -37$;

г) $-7{,}2 - (3{,}6 - 4{,}5x) = 2{,}7x$.

180. При каком значении x разность числовых значений трехчленов $3x^3 - 5x - 7$ и $3x^3 + 8x - 1$ равна 20?

181. В трех селах 1200 жителей. Сколько их в каждом селе, если во втором вдвое больше, чем в первом, а в третьем на 40 меньше, чем во втором?

182. Длины сторон треугольника выражаются тремя последовательными натуральными числами. Найдите их, если периметр треугольника 30 см.

183. Докажите, что сумма трех последовательных натуральных чисел всегда делится на 3.

Р е ш е н и е. Обозначим первое из данных натуральное число буквой n. Тогда следующие за ним натуральные числа будут $n + 1$ и $n + 2$. Их сумма

$$n + n + 1 + n + 2 = 3n + 3.$$

Числа 3 и $3n$ при каждом натуральном n делятся на 3. Следовательно, каким бы ни было натуральное число n, сумма $n + (n + 1) + (n + 2)$ всегда делится на 3. Это и требовалось доказать.

184. Докажите, что сумма пяти последовательных натуральных чисел делится на 5.

185. Может ли сумма четырех последовательных натуральных чисел делиться на 4?

§ 11. Умножение многочлена на одночлен

Умножим двучлен $a+b$ на одночлен m. По распределительному закону умножения

$$(a+b)\,m = am + bm.$$

Также можно умножить любой многочлен $a+b-c$ на m:

$$(a+b-c)\,m = am + bm - cm.$$

Каждое из этих равенств — тождество. Если в любое из них вместо какой-либо переменной написать одно и то же выражение, то снова получим тождество:

$$(2x+b)m = 2xm + bm,$$

$$(a+b-c)\cdot 4a^2 = a\cdot 4a^2 + b\cdot 4a^2 - c\cdot 4a^2 =$$

$$= 4a^3 + 4a^2b - 4a^2c.$$

Чтобы умножить многочлен на одночлен, нужно каждый член многочлена умножить на данный одночлен и результаты сложить.

По этому правилу можно также умножать одночлен на многочлен, поскольку множители можно менять местами.

Пример. $2ax(3x^2 - x + 4) = 2ax\cdot 3x^2 - 2ax\cdot x +$

$+ 2ax\cdot 4 = 6ax^3 - 2ax^2 + 8ax.$

Перемножьте выражения 186 — 187.

186. а) $3a + c$ и $2a$; б) $8x - y$ и $3xy$;

в) $x^2 - x$ и $2x$; г) $m^3 + 3m$ и m^2;

д) $x - 0{,}5$ и $-2x^2$; е) $l^2 + ml$ и $-3ml$.

187. а) $x^3 + 3x - 1$ и x^2;

б) $x^2 + mx + m^2$ и $-3mx$;

в) $2 - a + a^2$ и $-\frac{1}{2}ab^2$;

г) $1\frac{2}{3}x - x^2 - \frac{2}{3}$ и $-9xy^2$.

188. Запишите в виде многочлена выражение:

а) $(x+1)\,x^2$; б) $a^2(b-c)$;

в) $(n^2 - n)\,n^3$; г) $(2a+3b)\cdot 0{,}1$;

д) $(-a + ac)\,c^2$; е) $-2a(a^2 - a - 1)$.

Упростите выражения 189 — 190.

189°. а) $2a^3(4a^2+3a)-6a^4$; б) $7x^2-2x(3x-y)$.

190. а) $2x(x-1)-x^2$; б) $(3-a)a^2-3a^2$;
в) $(m-n)mn+2n^2m$; г) $(z-2)\cdot(-3z)$;
д) $-3c^3+(c-1)c^2$; е) $2p-(p^2+2)p$.

191. Тождественны ли выражения:

а) $(a-x)a$ и a^2-ax;
б) $(x-y)x^2$ и x^3-x^2y;
в) $(2p^2+q)$ и q^2+2p^2q;
г) $(m-n-1)mn$ и m^2n-n^2m?

192. Вычислите значение выражения:

а) $(b^2-4)b-b^3+3b$ при $b=-2{,}7$;
б) $(a^2-1)a-(a-1)a^2$ при $a=0{,}8$;
в) $c+c^2+c^3-c(1+c)$ при $c=0{,}5$;
г) $(x-y)x+(x-y)y$ при $x=2$ и $y=3$.

193. Проиллюстрируйте справедливость тождества $(a+b)m+am+bm$ для положительных значений a, b и m (рис. 8).

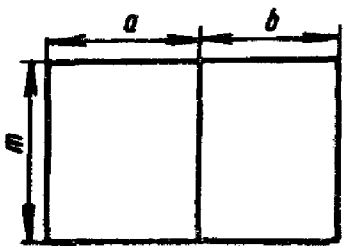


Рис. 8

Решите уравнения 194 — 198.

194. а) $2(x-3)+5(x-2)=12$;
б) $3(1-x)-2(3-x)=5$;
в) $3z-7(2z+4)=18$;
г) $2+3y-7(5-y)=15$.

195°. а) $2z-15(1-2z)=7z$;
б) $8c-(3-7c)=9c+2$;
в) $1-8(3-2y)=2(1-y)$;
г) $3z-(z-5)\cdot 4=(1-5z)\cdot 3$.

196. а) $x^2-3x+1=x(x+2)$;
б) $3t-t^2=t(2t-t)$;
в) $0{,}7x+0{,}8=2{,}6(x-1{,}5)$;
г) $1{,}7(a-3)-a=2{,}3(a+1)$.

197. а) $5 - 3(x + 1{,}5) = 2(3 - x)$;

б) $4{,}7(x^2 + x - 3) = 4{,}7x(x + 1)$;

в) $\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}(x - 3) = 3 - \frac{1}{3}x$;

г) $\frac{2}{5} - \frac{1}{3}x - \frac{2}{5}(x - 1) = \frac{1}{15}$.

198. а) $\frac{1}{3}(3x - 2) - \frac{1}{3}(9 - 2x) = \frac{1}{2}x$;

б) $\frac{1}{6}(8 - z) - \frac{1}{3}(5 - 4z) = \frac{1}{2}z + 3$;

в) $0{,}5(9x + 7) - (x - \frac{1}{7}x) = 36\frac{2}{7}$;

г) $2 - \frac{1}{4}y - \frac{1}{2}y + \frac{7}{4} = -\frac{1}{5}(y + 17)$.

199. У Коли денег вдвое больше, чем у Пети. Если бы Коле дали еще 1 грн., а Пете — еще 10 к., то у Коли их стало бы в три раза больше, чем у Пети. Сколько денег у каждого?

200. В хозяйстве было всего 305 коров и телок. После того как число коров увеличилось на 15, а телок — на 90, телок стало в 4 раза больше, чем коров. Сколько в хозяйстве стало коров?

201. Сумма двух чисел равна 60. Если одно из них умножить на 2, а второе на 7, сумма произведений будет равна 70. Найдите эти числа.

202. Один брат старше другого на 6 лет, а 3 года назад он был старше в два раза. Сколько лет каждому из братьев?

Р е ш е н и е. Если младшему брату x лет, то старшему $(x + 6)$ лет. 3 года назад младшему было $x - 3$, а старшему $(x + 6 - 3)$ года. Тогда старшему брату было в два раза больше лет, чем младшему, следовательно,

$$x + 3 = 2(x - 3).$$

Решим это уравнение:

$$x + 3 = 2x - 6,$$

$$-x = -9, \quad x = 9.$$

О т в е т. 9 лет и 15 лет.

203. Отцу 34 года, а дочери 12. Через сколько лет дочь будет вдвое моложе отца?

204. Три года назад отец был старше сына в пять раз, а теперь в четыре раза. Сколько лет каждому?

205. Сколько лет ученику, если известно, что через 10 лет он будет в 5 раз старше, чем был 10 лет назад?

206. В одной бочке 99 л бензина, а во второй — 57 л. Из первой ежедневно берут по 12 л, а из второй — по 10 л. Через сколько дней в первой бочке бензина будет в 3 раза больше, чем во второй?

207. В одном сосуде 84 г кислоты, а во втором —12 г. Сколько кислоты следует перелить из первого сосуда во второй, чтобы в первом ее стало в 2 раза больше, чем во втором?

§ 12. Умножение многочленов

Умножим многочлен $a + b - c$ на $x + y$. Обозначив многочлен $x + y$ одной буквой m, получим:

$$(a + b - c)(x + y) = (a + b - c)\,m = am + bm - cm =$$
$$= a(x + y) + b(x + y) - c(x + y) =$$
$$= ax + ay + bx + by - cx - cy.$$

Следовательно,

$$(a + b - c)(x + y) = ax + ay + bx + by - cx - cy.$$

Если бы мы умножили сначала a на x и y, затем b на x и y, наконец — c на x и y, то есть каждый член первого многочлена на каждый член второго многочлена и полученные произведения сложили, получили бы тот же результат: $ax + ay + bx + by - cx - cy$.

Чтобы умножить многочлен на многочлен, надо каждый член первого многочлена умножить на каждый член второго многочлена и полученные произведения сложить.

Пример. $(x^2 - 2x + 3)(a - 5) = x^2a + x^2(-5) -$
$$- 2xa - 2x(-5) + 3a + 3(-5) = ax^2 - 5x^2 -$$
$$- 2ax + 10x + 3a - 15.$$

Если нужно перемножить больше двух многочленов, то сначала умножают первые два из них, затем полученный результат умножают на третий многочлен

и т. д. Для примера перемножим многочлены $x - a$, $x + a$ и $x^2 - a^2$.

$$(x - a)(x + a) = x^2 + ax - ax - a^2 = x^2 - a^2,$$
$$(x^2 - a^2)(x^2 - a^2) = x^4 - a^2x^2 - a^2x^2 + a^4 =$$
$$= x^4 - 2a^2x^2 + a^4.$$

Таким образом,

$$(x - a)(x + a)(x^2 - a^2) = x^4 - 2a^2x^2 + a^4.$$

208. Найдите произведение многочленов:

а) $a + b$ и $m - n$; б) $x - y$ и $x + y$;

в) $2a - 1$ и $a - 2$; г) $c + ax$ и $a + x$;

д) $1 - c$ и $a + c^2$; е) $-a + 1$ и $2a - 3$.

Представьте в виде многочленов произведения **209 — 210.**

209. а) $(a - b)(c + d)$; б) $(x - 2)(x - 3)$;

в) $(2x - 3)(a - b)$; г) $(a^2 - b)(a - b^2)$;

д) $(a^2 + b)(a^2 + b)$; е) $(\frac{1}{2}x + 2)(\frac{1}{2}x + 2)$.

210. а) $(-a - b)(c + d)$;

б) $(-2 + c)(-3 + c)$;

в) $(x^2 - x + 1)(x + 1)$;

г) $(p - 1)(p^2 + p + 1)$;

д) $(c + z - q)(1 - cq)$;

е) $(0{,}5x - 1{,}3)(0{,}5x + 1{,}3)$.

211. Тождественны ли выражения:

а) $(a - b)(a + b)$ и $a^2 - b^2$;

б) $(x + a)(x + a)$ и $x^2 + 2xa + a^2$;

в) $(c^2 + c - 1)(c - 1)$ и $c^3 - 1$;

г) $c^2 + 1$ и $(c + 1)(c^2 - c + 1)$?

212°. Упростите выражение:

а) $(x - 1)(x^2 - 2x + 2)$;

б) $(m + n)(m^2 - mn + n^2)$;

в) $(a + 2)(a - 5) + 3a$;

г) $(n - 2)(n - 2) + 4n$.

213. Вычислите значение выражения:

а) $(a + b)(a - b) + b^2$ при $a = 0{,}6$ и $b = 0{,}237$;

б) $(x + y)(x + y) - x^2 - y^2$ при $x = 0{,}2$ и $y = 5$;

в) $(a^2 - b)(a^2 + b) - a^4$ при $b = 0{,}2$ и $a = 3{,}27$;

г) $-x^2 + y^4 + (x - y^2)(x + y^2)$ при $x = 5$ и $y = -7$.

214. Упростите выражение:

а) $3x(x - 6) + (2x^2 + 14)$;

б) $(3a + b)(a - b) - (2a^2 - b^2)$;

в) $(a - b)(a - 3) + 2a(1 - a)$;

г) $(x - y)(x + y) - x(x - 3)$.

215. Упростите выражение:

а) $(a + b)(a - b)(a^2 + b^2)$; б) $(1 - x)(1 + x)(1 + x^2) + x^4$.

216. Запишите в виде многочлена выражение:

а) $(a + b)^2$; б) $(x - y)^2$;

в) $(2a - x)^2$; г) $(3a + 2)^2$.

217°. Упростите выражение:

а) $(b + 1)^2 + 2b(3b - 1)$; б) $6xy + 3(x - y)^2$.

218. Докажите тождество $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$:

а) пользуясь правилом умножения многочленов;

б) при помощи рисунка 9.

Какое доказательство более общее?

219. Истинность какого тождества для положительных a, b, c, m и n следует из рисунка 10?

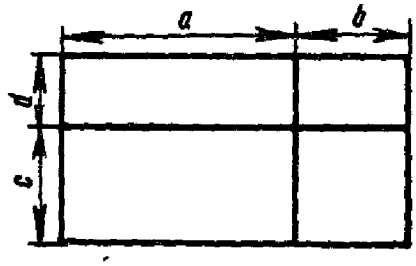


Рис. 9

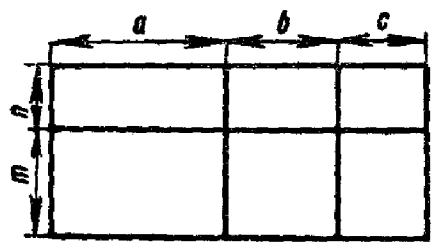


Рис. 10

Решите уравнения 220 —222.

220. а) $(x-1)(x-3)=x^2$; б) $(y+2)(y-5)=y^2$;
в) $(2x+1)(x-5)=2x^2$; г) $3z^2=(1-z)(1-3z)$.

221. а) $(m+3)(2-m)=m(1-m)$;
б) $x(x+3)=(x+3)(x-3)$;
в) $2(x-1)(x+1)=2x(x+3)$;
г) $(x-1)(3x-1)=x(3x+4)$.

222. а) $0{,}5c^2-(0{,}5c-1)(c+2)=1$;
б) $-(y+2)(0{,}3y-1)=1-0{,}3y^2$;
в) $\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)=x^2-\frac{1}{3}$;
г) $\frac{2}{5}x^2=(x+1)\left(\frac{2}{5}x+2\right)$.

223. Даны два произведения: $11\cdot 44$ и $16\cdot 32$. На какое число следует увеличить каждый из четырех множителей, чтобы новые произведения равнялись друг другу?

224. На какое число следует уменьшить каждый из четырех множителей $25\cdot 51$ и $31\cdot 40$, чтобы новые произведения равнялись друг другу?

225. Даны два прямоугольника размерами 40×50 см^2 и 36×52 см^2. Можно ли каждую сторону уменьшить на одно и то же число сантиметров так, чтобы получить прямоугольники равных площадей?

Р е ш е н и е. Допустим, что каждую сторону данных прямоугольников укоротили на x см (рис. 11). Тогда их площади будут $(40-x)(50-x)$ и $(36-x)(52-x)$. Эти площади должны быть равны по условию.

$$(40-x)(50-x)=(36-x)(52-x).$$

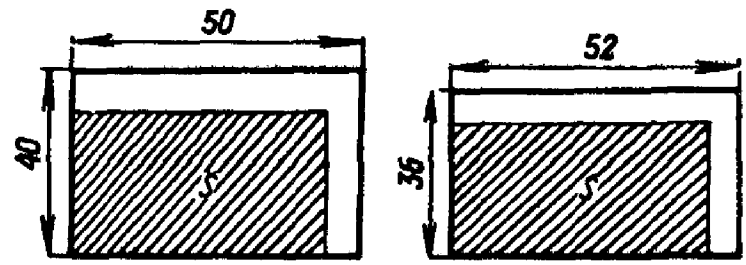


Рис. 11

Решим это уравнение.

$$2000 - 90x + x^2 = 1872 - 88x + x^2,$$
$$2x = 128,$$
$$x = 64.$$

Число 64 удовлетворяет уравнению, но не удовлетворяет условию задачи.

О т в е т. Нельзя.

226. Сторона одного квадрата больше стороны другого на 1 см, а площадь — на 32 см^2. Найдите сторону меньшего квадрата.

227. Разность периметров двух квадратов равна 12 см, а разность их площадей 33 см^2. Найдите площади квадратов.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ №2

В а р и а н т 1

1. Вычислите значение выражения $3x^2 - x + 2$ при $x = -1{,}3$.

2. Найдите сумму, разность и произведение многочленов $a^2 + a - 3$ и $a^2 - 2$.

3. Упростите выражение $(3 + x)(3 - x) + x^2$.

4. Решите уравнение $(x - 5)(x + 1) = x^2 - 13$.

В а р и а н т 2

1. Вычислите значение выражения $a^2 - 3a + 1$ при $a = -1{,}6$.

2. Найдите сумму, разность и произведение многочленов $n^2 - n - 2$ и $n^2 - 1$.

3. Упростите выражение $25 - (5 - c)(5 + c)$.

4. Решите уравнение $(x - 2)(x + 4) = x^2$.

В а р и а н т 3

1. Вычислите значение выражения $c^2 - 2c + 3$ при $c = -1{,}2$.

2. Найдите сумму, разность и произведение многочленов $2a^2 - a - 1$ и $a^2 + 2$.

3. Упростите выражение $p^2 - (2 + p)(2 - p)$.

4. Решите уравнение $x^2 + 3 = (x - 1)(x + 3)$.

Вариант 4

1. Вычислите значение выражения $z^2 - 2z + 3$ при $z = -2{,}1$.

2. Найдите сумму, разность и произведение многочленов $c^2 + 2c + 1$ и $c^2 + 3$.

3. Упростите выражение $x^2 - c^2 + (c - x)(c + x)$.

4. Решите уравнение $x(x - 3) = x^2 - 5x + 4$.

§ 13. Разность квадратов

Отдельные случаи умножения многочленов встречаются очень часто. Например, нередко приходится умножать двучлены $a + b$ и $a - b$, $a + b$ и $a + b$ и др. Чтобы в таких случаях сразу можно было писать ответы, полезно помнить некоторые тождества, называемые *формулами сокращенного умножения*. Далее мы рассмотрим несколько формул.

Умножим сумму переменных a и b на их разность:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2.$$

Следовательно,

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

Это равенство — тождество. Словами его читают так: ***произведение суммы и разности двух выражений равно разности квадратов этих выражений.***

Пользуясь доказанной формулой, можно сразу написать:

$$(2a + 3c)(2a - 3c) = 4a^2 - 9c^2,$$
$$(1 - ax)(1 + ax) = 1 - a^2x^2.$$

Левую и правую части доказанной формулы можно поменять местами. Получим формулу *разности квадратов двух выражений*:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

Разность квадратов двух выражений равна произведению их суммы и разности.

Примеры.

$$x^2 - 16 = x^2 - 4^2 = (x + 4)(x - 4),$$

$$25a^2 - c^4 = (5a)^2 - (c^2)^2 = (5a + c^2)(5a - c^2).$$

228. Даны выражения $3x$ и $5y$. Запишите: а) разность их квадратов; б) квадрат их разности; в) сумму их квадратов; г) квадрат их суммы.

Представьте в виде многочленов выражения 229 — 236.

229. а) $(x + m)(x - m)$; б) $(x + z)(x - z)$;
в) $(m + 4)(m - 4)$; г) $(5 + a)(5 - a)$;
д) $(ab + c)(ab - c)$; е) $(ab - 1)(ab + 1)$.

230°. а) $(4a + 1)(4a - 1)$; б) $(2a - c)(2a + c)$;
в) $(2d + x)(2d - x)$; г) $(a - c^2)(a + c^2)$;
д) $(8x - y^2)(y^2 + 8x)$; е) $(2a^2 + 3b)(2a^2 - 3b)$.

231. а) $(3p - q)(q + 3p)$; б) $(m - 4c^2)(m + 4c^2)$;
в) $(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)$; г) $(m^2 - n^2)(m^2 + n^2)$;
д) $(4a - b^3)(4a + b^3)$; е) $\left(\frac{1}{2}c - p\right)\left(\frac{1}{2}c + p\right)$.

232. а) $\left(\frac{2}{3}x - 1\right)\left(\frac{2}{3}x + 1\right)$;

б) $(5 + abc)(5 - abc)$;

в) $(0{,}4a - x)(0{,}4a + x)$;

г) $(1{,}5 - m^2)(1{,}5 + m^2)$;

д) $\left(\frac{1}{3}x^2 + y\right)\left(\frac{1}{3}x^2 - y\right)$;

е) $\left(1\frac{2}{3} + az^2\right)\left(1\frac{2}{3} - az^2\right)$.

233. а) $2(4x - 1)(4x + 1)$;

б) $k(m^2 - 2pt)(m^2 + 2pt)$;

в) $(2q - c^3n)(2q + c^3n)$;

г) $(0{,}5 + 2a)(0{,}5 - 2a) \cdot 2c^2$.

234. а) $\left(\frac{1}{4}a + 4b\right)\left(\frac{1}{4}a - 4b\right) \cdot 4a$;

б) $\left(\frac{2}{5}m - 2n\right)\left(\frac{2}{5}m + 2n\right) \cdot 5m$;

в) $7a^2\left(1+\frac{3}{7}a^2b\right)\left(1-\frac{3}{7}a^2b\right)$;

г) $-\frac{1}{2}(c+2q)(c-2q)$.

235. а) $(a-2b)(a+2b)+4b^2$;

б) $(m^2+3y)(m^2-3y)-m^4$;

в) $c^2-(c-1)(c+1)$;

г) $\left(a-\frac{1}{3}c^2\right)\left(a+\frac{1}{3}c^2\right)+\frac{2}{3}c^4$.

236. а) $(x-3)(x+3)(x^2+9)$;

б) $(m+5)(m-5)(m^2+25)$;

в) $(4a^2+1)(2a+1)(2a-1)$;

г) $(9y^2-z^2)(z+3y)(3y-z)$.

237. Найдите произведение выражений:

а) $-x-y$ и $-x+y$;

б) $2a+3b$ и $-2a-3b$;

в) $0{,}5-2x^4$ и $-0{,}5+2x^4$;

г) $-1+3x^2a$ и $3x^2a+1$.

238. Замените звездочки одночленами так, чтобы получилось тождество:

а) $(2x-3y)(*+*)=4x^2-9y^2$;

б) $(5m-*)(5m+*)=25m^2-9a^2b^2$;

в) $(4a-*)(*+3x^2)=16a^2-9x^4$.

239. На какое выражение надо умножить двучлен $6x-p$, чтобы получить $36x^2-p^2$?

240. На какое выражение надо умножить двучлен $1+9a^2$, чтобы получить $1-81a^4$?

241. Представьте в виде произведения:

а) x^2-m^2; б) a^2-9;

в) b^2-c^4; г) $1-16z^2$;

д) $q^2-p^2n^2$; е) $0{,}04-x^2$;

ё) $\frac{1}{4}a^2-m^4$; ж) $-c^4+9a^2$.

242. Вычислите:

а) $35^2 - 15^2$; б) $43^2 - 27^2$;

в) $136^2 - 64^2$; г) $51{,}5^2 - 49{,}5^2$;

д) $21{,}3^2 - 1{,}3^2$; е) $\left(3\frac{2}{3}\right)^2 - \left(1\frac{1}{3}\right)^2$.

243. Докажите, что:

а) $60^2 + 899^2 = 901^2$; б) $65^2 + 2112^2 = 2113^2$.

244. Докажите, что:

а) $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$;

б) $21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2$.

245. Верно ли равенство:

$36^2 + 37^2 + 38^2 + 39^2 + 40^2 = 41^2 + 42^2 + 43^2$?

246. Докажите, что при каждом натуральном значении n:

а) число $(n + 5)^2 - n^2$ делится на 5;

б) число $(n + 7)^2 - n^2$ делится на 7;

в) число $(6n + 1)^2 - 1$ делится на 12.

Решите уравнения 247 — 250.

247. а) $(x - 2)(x + 2) = x^2 + 8x$;

б) $(3 + c)(3 - c) = 3c - c^2$.

248. а) $-x^2 + (x + 5)(x - 5) = x$;

б) $(y + 4)(y - 4) - y^2 = 18y$.

249. а) $(9 - x)(x + 9) = -x^2 + 3x$;

б) $z^2 = 2z - (z + 3)(3 - z)$.

250. а) $4x^2 + (3 - 2x)(3 + 2x) = 81x$;

б) $9b^2 - (2 - 3b)(2 + 3b) = -4$.

§ 14. Квадрат двучлена

Умножим двучлен $a + b$ на $a + b$:

$$(a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Следовательно,

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Квадрат двучлена равен квадрату первого его члена, плюс удвоенное произведение первого на второй, плюс квадрат второго члена.

Доказанное равенство — тождество, его называют *формулой квадрата двучлена*. Пользуясь ею, можно сразу записать:

$$(2x + y)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot y + y^2 = 4x^2 + 4xy + y^2,$$
$$(a - 3c)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot (-3c) + (-3c)^2 = a^2 - 6ac + 9c^2.$$

Промежуточные преобразования следует выполнять устно, например:

$$(m + 5a^2b)^2 = m^2 + 10ma^2b + 25a^4b^2.$$

По формуле квадрата двучлена можно возводить в квадрат любые двучлены, в том числе $-a + b$ и $-a - b$:

$$(-a + b)^2 = (-a)^2 + 2(-a)b + b^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$
$$(-a - b)^2 = (-a)^2 + 2(-a)(-b) + (-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Запомните формулу $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Возведите в квадрат двучлены 251 — 253.

251. а) $a + c$; б) $x + y$;
в) $m + 3$; г) $1 + ab$.

252. а) $2x + 4$; б) $3a + b$;
в) $mn + 2$; г) $2a + 5x$.

253. а) $x - 1$; б) $2c - a$;
в) $1 - ab$; г) $cq - 2p$.

Запишите в виде многочлена выражения 254 — 261.

254. а) $(m + 2)(m + 2)$; б) $(3 + p)(3 + p)$;
в) $(2a + b)(2a + b)$.

255. а) $\left(n + \frac{1}{2}\right)\left(n + \frac{1}{2}\right)$; б) $(p + 0{,}1)(p + 0{,}1)$;
в) $(2a^3 + 1)(2a^3 + 1)$.

256°. а) $(b + c^3)^2$; б) $(b + 4c^2)^2$; в) $(2 - q^5)^2$.

257. а) $\left(\frac{1}{2}c + 2a\right)^2$; б) $\left(\frac{2}{3}m - \frac{3}{2}p\right)^2$; в) $(4q^2 + 5p)^2$.

258. а) $(0{,}2c - p^3)^2$; б) $(1{,}2 + 2q^3)^2$; в) $(4x^2 - 3y^2)^2$.

259. а) $(a^2 - 8c^5)^2$; б) $(a^2 - c)^2$; в) $(-x + y^3)^2$.

260. а) $(-m-n^2)^2$; б) $(2q^2-2p)^2$;
в) $(-0{,}2m-mq^2)^2$.

261. а) $\left(-\frac{1}{2}-2c^2\right)^2$; б) $\left(-0{,}3x^3+\frac{1}{4}c\right)^2$;
в) $\left(-\frac{1}{5}c-0{,}5a^2\right)^2$.

Упростите выражения 262 — 265.

262. а) $(x-3)^2-x(x-6)$; б) $(m+5)^2-(m-5)$.

263. а) $1-(2a-1)^2$; б) $z^2+1-(1+z)^2$.

264°. а) $(x-2)^2+(x-5)(x+7)$;
б) $y(y+2x)-(x+y)^2$.

265. а) $(b+4)^2-(b-3)(b+3)$;
б) $3(a-1)^2+8a$.

266. Замените звездочки одночленами так, чтобы получилось тождество:

а) $(*+b)^2=c^2+2cb+b^2$;

б) $(a+*)^2=a^2+2am+*$;

в) $(3x-*)^2=9x^2-*+1$;

г) $(*-3bx)^2=*-6abx+*$.

267°. Найдите числовое значение выражения:

а) $(a-5)^2-a(a+8)$ при $a=0{,}5$;

б) $(3c+0{,}5)^2-(3c-0{,}5)^2$ при $c=\frac{1}{9}$;

в) $(2x-5)^2-4x^2-20x$ при $x=0{,}23$.

268. Докажите тождество:

а) $(a-b)^2=(b-a)^2$;

б) $(-a-b)^2=(a+b)^2$;

в) $(a+b)^2-2ab=a^2+b^2$;

г) $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$.

269. При каких значениях a и b истинно равенство $(a-b)^2=(a+b)^2$?

270. Покажите, что при достаточно малых α истинно приближенное равенство $(1 + \alpha)^2 \approx 1 + 2\alpha$. Пользуясь им, устно найдите приближенные значения выражений:

а) $(1 + 0{,}001)^2$; б) $1{,}003^2$; в) $0{,}99^2$; г) $0{,}998^2$.

271. Объясните геометрический смысл формулы квадрата двучлена для положительных значений a и b по рисунку 12.

272. Докажите тождество:

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$.

Пользуясь им, возведите в квадрат трехчлены $x + y + 1$ и $2m + n + 3$.

273. Докажите формулу куба двучлена:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Пользуясь ею, возведите в куб двучлен:

а) $2x + 3$; б) $4a + c$;

в) $m^2 + 2ac$; г) $x - y$.

Решите уравнения 274 — 279.

274. а) $(x - 2)^2 = x^2$; б) $(3y + 5)^2 = 9y^2$;

в) $(c - 7)^2 = c^2 - 7$; г) $(6 - z)^2 = z^2 + 36$.

275. а) $(x - 5)^2 - x(x + 3) = 12$;

б) $(3z + 1)^2 - 9z\,(z + 6) = -1$;

в) $(0{,}2y + 3)^2 - (0{,}2y - 3)^2 = 0{,}8$;

г) $\left(\frac{2}{3}x - 1\right)^2 = \left(\frac{1}{3}x + 1\right)\left(\frac{4}{3}x - 1\right)$.

276. а) $3\,(y + 5)^2 = 0$;

б) $\frac{1}{2}(3 - 2x)^2 = 0$;

в) $0{,}7\,(1 - 3x)^2 = 0$.

277. а) $(x - 3)^2 = 1$;

б) $(5 - y)^2 = 1$;

в) $(2z + 3)^2 - 1 = 0$.

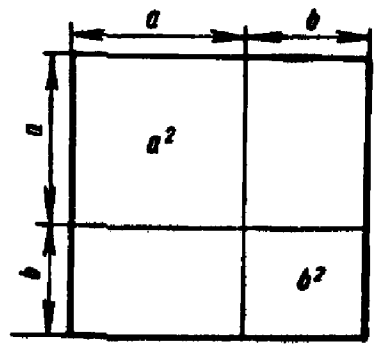


Рис. 12

278. а) $3(x-2)^2 = 3$; б) $(2x-1)^2 + 2 = 0$;
в) $(x+7)^2 + x^2 = 0$.

279. а) $(x-4)^2 = 8x + 16$; б) $(5-y)^2 = 10y + 25$;
в) $(1-2z)^2 + 4z = 0$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Вариант 1

1. Возведите в квадрат двучлен:

а) $x + 3$; б) $a^2 - c$.

2. Представьте в виде многочлена:

а) $(ax + b^2)^2$; б) $(-1 + 2c^3)^2$.

3. Упростите выражение $12ab - (2a + 3b)^2$.

4. Решите уравнение $(x-3)^2 = (x-5)(x+4)$.

Вариант 2

1. Возведите в квадрат двучлен:

а) $m - 5$; б) $x^2 - z$.

2. Представьте в виде многочлена:

а) $(cx + 2b)^2$; б) $(-2 + 3c)^2$.

3. Упростите выражение $30xc - (3x + 5c)^2$.

4. Решите уравнение $(x-2)^2 = (x+3)(x-4)$.

Вариант 3

1. Возведите в квадрат двучлен:

а) $3 - y$; б) $a - x^3$.

2. Запишите в виде многочлена:

а) $(2x + ab)^2$; б) $(-1 + 4a)^2$.

3. Упростите выражение $24ma - (4m + 3a)^2$.

4. Решите уравнение $(x+2)^2 = (x-1)(x+4)$.

Вариант 4

1. Возведите в квадрат двучлен:

а) $7 - a$; б) $t^2 - a$.

2. Запишите в виде многочлена:

а) $(3c - xy)^2$; б) $(-3 + 5a)^2$.

3. Упростите выражение $9a^2b^2 - (2 - 3ab)^2$.

4. Решите уравнение $(x-4)^2 = (x-5)(x+2)$.

Глава III

РАЗЛОЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ НА МНОЖИТЕЛИ

§ 15. Вынесение общего множителя за скобки

Вы умеете раскладывать на множители натуральные числа:

$15 = 3 \cdot 5$, $120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$, $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ и т.п.

Подобно этому раскладывают на множители и многочлены. *Разложить многочлен на множители* — это значит заменить его произведением нескольких многочленов, тождественным данному многочлену. Например, многочлен $x^2 - 1$ раскладывается на множители $x + 1$ и $x - 1$, поскольку истинно тождество $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$.

Один из способов разложения многочлена на множители — *вынесение общего множителя за скобки.* Рассмотрим его.

Каждый член многочлена $ax + ay$ имеет общий множитель a. На основании распределительного закона умножения $ax + ay = a(x+y)$. Это значит, что данный многочлен $ax + ay$ разложили на два множителя: a и $x + y$.

Примеры.

$$4ab - 2ab^2 = 2ab \cdot 2 - 2ab \cdot b = 2ab\,(2 - b),$$

$$3x + 6x^2 - 9x^3 = 3x \cdot 1 + 3x \cdot 2x - 3x \cdot 3x^2 =$$

$$= 3x\,(1 + 2x - 3x^2).$$

Чтобы убедиться в том, что разложение многочлена на множители выполнено верно, следует перемножить полученные множители. В результате должен получиться данный многочлен.

Иногда приходится раскладывать на множители выражения, имеющие общий многочленный множитель.

Например, в выражении $a\,(b-c)+x\,(b-c)$ общий множитель $b-c$. Его также можно вынести за скобки:

$$a\,(b-c)+x\,(b-c)=(b-c)\,(a+x).$$

280. Разложите на простые множители числа: 45, 121, 150, 819.

Вынесите за скобки общий множитель 281 — 285.

281. а) $xa+xb$; б) $2m+2p$; в) $cp+tp$.

282. а) $ab+3b^2$; б) $4b^2-2ab$; в) $6x^2-2x$.

283°. а) $2a^2+3a$; б) $7n-14n^2$; в) $5p^3-5p$.

284. а) $a^3b^3-6ab^4$; б) $5y^3z+20az^3$;
в) $-12x-15x^2$.

285. а) $3a^6+6a^5+a^4$; б) $2y-3y^2-y^3$;
в) $6z^2-3z^3+3z$.

Разложите на множители многочлены 286 — 287.

✓ **286.** а) $2ac^2-8c^3d+4acd$;
б) $8a^4x+7a^2x^2+ax^3$;
в) $3x^3-6x^2y-12xy^4$;
г) $-5c+12c^2-c^3$.

287. а) $0{,}5x+x^2-1{,}5x^3$;
б) $-m^2x+4mx^2+3m^3$;
в) $a^2b-2a^3b^2+3ab^3-ab^3$;
г) $0{,}7x^3-1{,}4x^2+2{,}1x-2{,}8x^4$.

288. Вычислите значение выражения:

а) $12{,}3x+12{,}3y$ при $x=0{,}23$, $y=0{,}77$;

б) $x^2-1{,}3x$ при $x=11{,}3$.

289. Докажите, что:

а) $16^{17}+16^{16}$ делится на 17;
б) $5^{12}+5^{10}$ делится на 13;
в) 49^5+7^8 делится на 350.

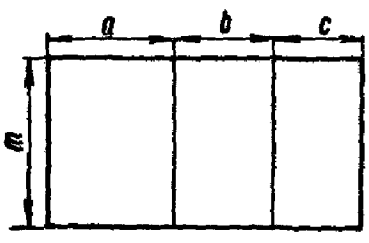


Рис.13

290. Объясните геометрический смысл тождества $am+bm+cm=(a+b+c)\,m$ для положительных значений a, b, c и m по рисунку 13.

291. Разложите на множители выражение:

а) $a(x-y)+c(x-y)$; б) $4(a-b^2)+a(a-b^2)$;

в) $(p-q)^2+p-q$; г) $-x+y+(x-y)^2$.

Решите уравнения 292 — 296.

292. а) $x(x-3)=0$; б) $y(5-y)=0$;

в) $3z(z+4)=0$.

293. а) $2x^2-2x=0$; б) $3z^2-z=0$; в) $4y^2=8y$.

294. а) $x^3-5x^2=0$; б) $5m^3-m^2=0$;

в) $x^3-2x^2=0$.

295. а) $3x^2+6(x+2)=12$; б) $x^2-5(x-3)=15$.

296. а) $x^3-5(x^2-2)=10$;

б) $2z^4-7(z^3-3)=21$.

§ 16. Способ группировки

Разложим на множители многочлен $ab+ac+xb+xc$. Разобьем его члены на две группы: $(ab+ac)+(xb+xc)$. Вынесем из первой группы за скобки общий множитель a, а из второй — общий множитель x. Получим выражение $a(b+c)+x(b+c)$. Слагаемые этого выражения имеют общий множитель $b+c$. Вынесем его за скобки, получим $(b+c)(a+x)$.

Указанные преобразования можно записать цепочкой:

$$ab+ac+xb+xc=(ab+ac)+(xb+xc)=$$
$$=a(b+c)+x(b+c)=(b+c)(a+x).$$

Такой способ разложения многочленов на множители называют *способом группировки.*

Примечание. Раскладывая на множители этот многочлен, можно группировать его члены иначе:

$$ab+ac+xb+xc=(ab+xb)+(ac+xc)=$$
$$=b(a+x)+c(a+x)=(a+x)(b+c).$$

Получили тот же результат.

297. Представьте в виде произведения выражение:

а) $c(a+m)+z(a+m)$; б) $2(1-c)+c(1-c)$;

в) $m(1+n)+n(1+n)$; г) $ax+x+2(a+1)$.

298°. Вынесите за скобки общий множитель:

а) $(a+b)^2-3(a+b)$; б) $(a-b)^2+c(a-b)$;

в) $m+c+c^2(c+m)$; г) $x-y+3(x-y)^2$.

Разложите на множители многочлены 299 — 302.

299. а) $ab+bc+ca+c^2$;

б) $2x-yx+2y-y^2$;

в) $3-6a+z-2az$;

г) $10ax-5bx+2ay-by$.

300. а) $4a^2-4az-3a+3z$;

б) $3x^2-3xy+3y^2-3xy$;

в) $a+a^2-a^3-a^4$;

г) $a^3+a^2b-a^2c-abc$.

301°. а) $a^2-ab-4a+4b$; б) $ax+3+3x+a$;

в) $ac+b-bc-a$; г) $3m-bx+mx-3b$.

302. а) $ax+ay-az+nx+ny-nz$;

б) $a+b-2-ax-bx+2x$;

в) $2ax+cx-6ax^2-3cx^2+2ac+c^2$;

г) $x^2+2x-ca-2c-cx+ax$.

303. Разложив на множители многочлен $ax+ay+bx+by+x+y$, ученик получил выражение $(x+y)\times(a+b)$. Какую ошибку он допустил?

304. Вычислите значение выражения:

а) x^3-9x^2+x-9 при $x=19$;

б) $m^2-mn-2m+2n$ при $m=0{,}35$ и $n=0{,}25$.

305. Вычислите:

а) $20{,}5\cdot 17+79{,}5\cdot 17+20{,}5\cdot 0{,}28+79{,}5\cdot 0{,}28$;

б) $42{,}2^2-42{,}2\cdot 41{,}2+57{,}8^2-57{,}8\cdot 56{,}8$.

306. Решите уравнение:

а) $x(x-15)+3(x-15)=0$;

б) $y(y-2)-7(2-y)=0$;

в) $x^3-3x^2+x-3=0$;

г) $2z^3-3z^2+2z-3=0$.

§ 17. Использование формул сокращенного умножения

Некоторые многочлены можно разложить на множители при помощи формул сокращенного умножения. Например, двучлен $x^2 - a^2$ можно представить в виде произведения по формуле разности квадратов:

$$x^2 - a^2 = (x + a)(x - a).$$

Трехчлены $x^2 + 2xy + y^2$ и $x^2 - 2xy + y^2$ раскладывают на множители по формуле квадрата двучлена.

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)(x + y),$$
$$x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)(x - y).$$

Разложите на множители выражения 307 — 312.

307. а) $p^2 - q^2$; б) $x^2 - 16$; в) $x^2 - 9y^2$;
г) $p^2 - x^4$; д) $a^2 - c^2x^2$; е) $9a^2 - 4b^2$.

308°. а) $1 - p^4$; б) $25 - c^6$; в) $0{,}01 - x^2$;
г) $\frac{1}{4} - \frac{1}{9}c^2$; д) $-c^2 + 16$; е) $-1 + a^2b^4c^6$.

309. а) $a^2 + 2am + m^2$; б) $x^2 + 4x + 4$;
в) $a^2 + 4ab + 4b^2$; г) $b^2 - 6b + 9$;
д) $1 + 6x + 9x^2$; е) $1 + x + \frac{1}{4}x^2$.

310. а) $3a^2 - 6ab + 3b^2$; б) $-x^2 + 2x - 1$;
в) $-4c^2 - 4c - 1$; г) $a + 2ax + ax^2$;
д) $4c - c^2 - 4$; е) $\frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}$.

311. а) $(2a - 1)^2 - 100$; б) $1 - (a - b)^2$;
в) $(x + c^2)^2 - 9x^2c^4$; г) $(1 - x^2)^2 - 4x^2$.

312. а) $(2n + 3)^2 - (n - 1)^2$;
б) $(3a + 2p)^2 - (a + p)^2$;
в) $4(x - y)^2 - (x + y)^2$;
г) $9(p + q)^2 - (p - q)^2$;
д) $(x - 2)^2 + 2(x - 2) + 1$;
е) $(3c + 2)^2 + 4(3c + 2) + 4$.

Решите уравнения 313 — 317.

313. а) $x^2 - 9 = 0$; б) $25y^2 - 4 = 0$;

в) $\frac{1}{4}z^2 - 25 = 0$.

314. а) $x^2 - 6x + 9 = 0$; б) $z^2 + 4z + 4 = 0$;

в) $5(y^2 - 8y + 16) = 0$; г) $\frac{1}{3}(x^2 - x + \frac{1}{4}) = 0$.

315*. а) $c^2 + 9 = 6c$; б) $y^2 + 4 = 4y$;

в) $2x^2 + 2 - 4x = 0$; г) $x - 1 = 0{,}25x^2$.

316*. а) $3x^2 + 2x + \frac{1}{3} = 0$;

б) $2y^2 + 2y + 0{,}5 = 0$;

в) $4(x^2 + x) = -1$;

г) $x(1 - 4x) = \frac{1}{16}$.

317*. а) $x^4 - (2 - x^2)^2 = 0$;

б) $7 + (z^2 - 1)^2 = z^4$.

§ 18. Разность и сумма кубов

Перемножим многочлены $a - b$ и $a^2 + ab + b^2$:

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3.$$

Таким образом, при любых значениях a и b

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Трехчлен $a^2 + ab + b^2$ называют *неполным квадратом суммы* выражений a и b (от $a^2 + 2ab + b^2$ он отличается только коэффициентом среднего члена). Поэтому доказанную формулу словами читают так: ***разность кубов двух выражений равна произведению разности этих выражений и неполного квадрата их суммы.***

Перемножим многочлены $a + b$ и $a^2 - ab + b^2$:

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3 = a^3 + b^3.$$

Следовательно,

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

Трехчлен $a^2 - ab + b^2$ называют *неполным квадратом разности* выражений a и b. Поэтому полученную формулу читают так: ***сумма кубов двух выражений равна произведению суммы этих выражений и неполного квадрата их разности.***

С помощью доказанных формул можно раскладывать на множители многочлены, представляющие собой разности или суммы кубов.

Примеры.

$x^3 - 8y^3 = x^3 - (2y)^3 = (x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2)$,

$1 + 0{,}027a^6 = 1^3 + (0{,}3a^2)^3 = (1 + 0{,}3a^2)(1 - 0{,}3a^2 + 0{,}09a^4)$.

Разложите на множители двучлены 318 — 325.

318. а) $a^3 - c^3$; б) $x^3 - 8$; в) $1 - p^3$.

319°. а) $c^3 - 64x^3$; б) $n^6 - 1$; в) $27a^3 - b^3$.

320. а) $\frac{1}{8} - z^3$; б) $0{,}001 - a^6$; в) $27x^6 - a^3y^3$.

321. а) $p^3 + q^3$; б) $8 + a^3$; в) $c^3 + 8x^3$.

322. а) $1 + a^6$; б) $a^3 + c^6$; в) $27 + a^3b^3$.

323. а) $\frac{1}{27} + x^3$; б) $p^3x^6 + 1$; в) $27m^3 + n^6$.

324. а) $a^{11}c^3 + 27x^3$; б) $-c^6 + 27x^3$; в) $a^6c^9 - 27x^3$.

325. а) $a^3 - \frac{1}{8}b^3c^6$; б) $-z^3 - p^3$; в) $0{,}008 + y^3z^9$.

Представьте в виде многочленов 326 — 332.

326. а) $(a - x)(a^2 + ax + x^2)$;

б) $(b - 2)(b^2 + 2b + 4)$.

327. а) $(1 - x)(1 + x + x^2)$;

б) $(a - c^2)(a^2 + ac^2 + c^4)$.

328. а) $(2a + n)(4a^2 + 2an + n^2)$;

б) $(1 + c + c^2)(1 - c)$.

329. а) $(a^3 - 1)(a^6 + a^3 + 1)$;

б) $(m - 1)(m^2 + 2m + 1)$.

330. а) $(a^2 + 1)(a^4 - a^2 + 1)$;

б) $(x^3 - 2a)(x^6 + 2x^3a + 4a^2)$.

331. а) $(3x + y)(9x^2 - 3xy + y^2)$;

б) $(2a + 3b)(4a^2 - 6ab + 9b^2)$.

332. а) $(4a^{14} - 2a^7b^4 + b^8)(2a^7 + b^4)$;

б) $(16a^2 + 8ab + b^2)(4a + b)$.

Перемножьте многочлены 333 — 336.

333. а) $x + 2$ и $x^2 - 2x + 4$;

б) $a + 1$ и $a^2 - a + 1$.

334. а) $x^2 + c$ и $x^4 + x^2c + c^2$;

б) $p - q^2$ и $p^2 + pq^2 + q^4$.

335. а) $x - 0{,}2$ и $x^2 + 0{,}2x + 0{,}04$;

б) $a^3 + b$ и $a^6 - a^3b + b^2$.

336. а) $a^5 + b$ и $a^{10} - a^5b + b^2$;

б) $x^2 + y^2$ и $x^4 + y^4 - x^2y^2$.

337*. Разложите на множители выражение:

а) $(a + 2)^3 - 8$;

б) $27 - (x + y)^3$;

в) $(z - 1)^3 + z^3$;

г) $64a^3 - (a - 1)^3$;

д) $\frac{1}{8}a^3 + \left(1 + \frac{1}{2}a\right)^3$;

е) $1 - (x + 1)^6$.

338. Найдите числовое значение выражения:

а) $(x + 1)(x^2 - x + 1) - x^3$ при $x = 5{,}73$;

б) $(z - 2)(z^2 + 2z + 4) + 8$ при $z = 0{,}02$.

Решите уравнения 339 — 341.

339. а) $(x - 1)(x^2 + x + 1) = x + x^3$;

б) $(y + 2)(y^2 - 2y + 4) = y^3 + 2y$.

340. а) $(x - 3)(x^2 + 3x + 9) + x = x^3$;

б) $(1 + y)(y^2 - y + 1) - y^3 = 2y$.

341. а) $(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1) = 0$;

б) $(y^3 + 1)(y^6 - y^3 + 1) = 0$.

342. Докажите, что

а) $321^3 - 123^3$ делится на 198;

б) $321^3 + 123^3$ делится на 111;

в) $15^6 + 1$ делится на 113.

343. Докажите, что три последние цифры числа $1993^3 + 7^3$ — нули.

344. Докажите, что если сумма двух натуральных чисел делится на какое-либо число, то и сумма их кубов делится на это число.

§ 19. Применение нескольких способов

Чтобы разложить многочлен, иногда приходится применять несколько способов.

Пример 1. Разложите на множители многочлен $4a^3 - ab^2$.

Р е ш е н и е. $4a^3 - ab^2 = a(4a^2 - b^2) = a(2a + b) \times (2a - b)$.

Здесь сначала вынесли за скобки общий множитель a, затем выражение в скобках разложили на множители по формуле разности квадратов.

Пример 2. Разложите на множители выражение $x^5 - x^4y + x^2y^3 - xy^4$.

Р е ш е н и е.

$x^5 - x^4y + x^2y^3 - xy^4 = x^4(x - y) + xy^3(x - y) = (x - y) \times (x^4 + xy^3) = (x - y)\,x\,(x^3 + y^3) = x(x - y)(x + y)(x^2 - xy + y^2)$. Здесь использованы способ группировки, вынесение общего множителя за скобки и формула суммы кубов.

Иногда удается разложить многочлен на множители, представив какой-либо его член в виде суммы или разности.

Пример 3. Разложите на множители многочлен $x^2 + 7x + 6$.

Р е ш е н и е. $x^2 + 7x + 6 = x^2 + x + 6x + 6 = x(x + 1) + 6(x + 1) = (x + 1)(x + 6)$.

Разложите на множители многочлены 345 — 356.

345. а) $ap^2 - ax^2$; б) $c^3 - cp^2$; в) $2 - 8a^2$.

346. а) $27x^2 - 75$; б) $18c^2x - 2x$; в) $100a^4 - a^2$.

347. а) $5a - 5a^3$; б) $49m^4 - m^2$; в) $64x^2y - 9x^2y^3$

348. а) $m^6 - 81$; б) $x^4 - 625$; в) $x^4 - y^6$.

349. а) $0{,}001a + a^4$; б) $-1 - a^6$; в) $-8y^4 - 64y$.

350. а) $\frac{1}{2}x - \frac{27}{16}x^4$; б) $\frac{1}{8}z - \frac{1}{18}z^3$;

в) $\frac{2}{9}a - 1\frac{2}{16}a^3c^2$.

351. а) $mx^2 + 4mx + 4m$;

б) $p^2 + 6xp^2 + 9x^2p^2$;

в) $36 - 6a + 0{,}25a^2$.

352. а) $-4m^2 + 4m - 1$;

б) $-a^2 - 6a - 9$;

в) $5x^2 + 5y^4 - 10xy^2$.

353. а) $ax^4 - x^4 + ax^3 - x^3$; б) $x^3 - x^2y + x^2 - xy$;

в) $x^2 - 2ax + a^2 - m^2$; г) $x^2 + 2x + 1 - a^2$.

354. а) $4ab + 12b - 4a - 12$;

б) $10 + 0{,}6xy - 5y - 1{,}2x$;

в) $m^2 - x^2 - 4x - 14$;

г) $x^2 - y^2 - 6x - 9$.

355. а) $x - a + x^2 - a^2$; б) $a^2 - b^2 + a - b$;

в) $k + p + k^2 - p^2$; г) $c^2 - c - m^2 - m$.

356. а) $a - b^2 + a^2 - b$; б) $c^3 - 3d^2 + 3c^2 - cd^2$;

в) $x^3 - a^3 + x - a$; г) $a + b - a^3 - b^3$.

357. Приведите пример двучлена, являющегося одновременно разностью квадратов и разностью кубов. Разложите его на множители.

358. Докажите тождество:

а) $a^2 + 3a + 2 = (a + 1)(a + 2)$;

б) $x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$;

в) $c^2 - 7c + 12 = (c - 3)(c - 4)$.

Решите уравнения 359 — 360.

359. а) $x^3 - x = 0$; б) $x^3 - 16x = 0$;

в) $3y - 12y^3 = 0$; г) $20c^2 - 5c^4 = 0$.

360. а) $x + x^3 = 0$; б) $2z^2 - 9z + 18 = z^3$;

в) $y^3 - 2y^2 - y + 2 = 0$; г) $x^3 + x = 3x^2 + 3$.

361. При каких значениях a:

а) значение выражения $a^3 + 3a^2 - a$ равно 3;

б) значения выражений $a^3 - a^2$ и $4a - 4$ равны друг другу;

в) значение выражения $a^2 + a$ в 5 раз больше значения выражения $a + 1$?

§ 20. Зачем преобразовывать выражения

До сих пор мы одни целые выражения представляли в форме многочленов, другие — наоборот, раскладывали на множители. Зачем? Это необходимо для решения различных задач. Например, чтобы решить уравнение $(x - 4)(x + 8) = x^2$, его левую часть целесообразно представить в форме многочлена:

$$x^2 - 4x + 8x - 32 = x^2,$$
$$4x = 32,$$
$$x = 8.$$

А чтобы решить уравнение $x^3 + 5x^2 + x + 5 = 0$, его левую часть желательно разложить на множители:

$$(x + 5)(x^2 + 1) = 0,$$
$$x + 5 = 0,$$
$$x = -5.$$

И не только для решения уравнений приходится преобразовывать выражения. Это используется и при решении многих других задач.

Пример 1. При каких x значение выражения $x^2 - 6x + 10$ наименьшее?

Р е ш е н и е. Чтобы ответить на вопрос, преобразуем данное выражение:

$$x^2 - 6x + 10 = x^2 - 6x + 9 + 1 = (x - 3)^2 + 1.$$

Выражение $(x - 3)^2 + 1$, а следовательно, и данное, имеет наименьшее значение при $x - 3 = 0$, т. е. $x = 3$.

Пример 2. Докажите, что сумма квадратов трех последовательных целых чисел не делится на 3.

Р е ш е н и е. Обозначим первое из этих чисел бук-

вой n, следующие за ним — числа $n + 1$ и $n + 2$. Сумма их квадратов

$$n^2 + (n + 1)^2 + (n + 2)^2 = n^2 + n^2 + 2n + 1 + n^2 + 4n + \\ + 4 = 3n^2 + 6n + 5.$$

При любом целом n числа $3n^2$ и $6n$ делятся на 3, а число 5 на 3 не делится. Следовательно, и вся сумма на 3 не делится.

Не умея преобразовывать выражения, мы не смогли бы решить ни эти, ни многие другие задачи.

362. Докажите, что при каждом значении x данное выражение принимает только положительные значения:

а) $(x + 2)^2 + 1$; б) $x^2 + (x - 3)^2$;

в) $(x - 1)^2 + (x + 2)^2$; г) $x^2 - 4x + 5$;

д) $x^2 - x + 1$; е) $9x^2 - 6x + 2$.

363. Докажите, что при каждом значении x данное выражение принимает только отрицательные значения:

а) $6x - x^2 - 10$; б) $x - x^2 - 1$; в) $2x - x^2 - 2$.

364. При каких значениях x данное выражение имеет наименьшие числовые значения?

а) $x^2 + 5$; б) $(x - 2)^2$; в) $(x - 3)^2 + 5$;

г) $x^2 - 6x + 9$; д) $x^2 + 4x + 6$; е) $4x^2 - 4x + 3$.

365. Найдите числовое значение выражения:

а) $x\,(x + 3)^2 + (5 + x)^3$ при $x = -4$;

б) $(a - 3)^4 - (4 + a)^4$ при $a = -0{,}5$;

в) $(c + 3)^2 - 2\,(c + 3)\,(c - 2) + (c - 2)^2$ при $c = 2{,}53$;

г) $(2z + 1)^2 - 4z\,(2z + 1) + 4z^2$ при $z = 3{,}75$.

366. Докажите тождество $7x^3 + 5x^2 - 6x + 3 = ((7x + 5)\,x - 6)\,x + 3$. В какой форме удобнее представлять такие выражения, вычисляя их значения на микрокалькуляторе?

367. Вычислите, используя микрокалькулятор, значение выражения $43x^3 - 95x^2 + 17x + 84$ при $x = 13$.

Р е ш е н и е. Преобразуем данный многочлен: $43x^3 - 95x^2 + 17x + 84 = ((43x - 95)\,x + 17)\,x + 84$. Его значение при $x = 13$ вычисляем по программе

43 [x] 13 [−] 95 [x] 13 [+] 17 [x] 13 [+] 84 [=]

О т в е т. 78721.

368. Используя микрокалькулятор, вычислите значение выражения $37y^3 - 12y^2 + 49y - 135$ при:

а) $y = 19$; б) $y = 2{,}7$; в) $y = 3{,}34$.

369. Докажите, что:

а) число $5^5 - 5^4 + 5^3$ делится на 21;

б) число $957^2 - 43^2$ делится на 1000.

370. Докажите, что при любом натуральном значении n:

а) $(n + 1)^2 - (n - 1)^2$ делится на 4;

б) $(3n + 2)^2 - (3n - 2)^2$ делится на 24;

в) $(5n + 3)^2 - (5n - 3)^2$ делится на 60.

Докажите утверждения 371 — 379.

371. Квадрат суммы двух положительных чисел больше суммы их квадратов.

372. Квадрат суммы двух чисел больше их удвоенного произведения.

373. Разность квадратов двух нечетных чисел делится на 4.

374. Разность квадратов двух последовательных нечетных чисел делится на 8.

375. Разность квадратов двух последовательных четных чисел на 8 не делится.

376. Сумма двух последовательных целых чисел равна разности их квадратов.

377. Нечетное число равно разности квадратов двух некоторых целых чисел.

378. Квадрат нечетного числа при делении на 8 дает в остатке 1.

379. Если сумма двух натуральных чисел делится на 10, то квадраты этих чисел заканчиваются одинаковыми цифрами.

380. Решите математические кроссворды на рисунках 14 — 16.

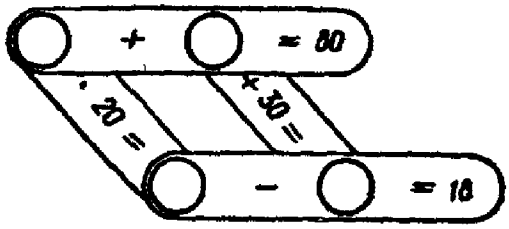


Рис.14

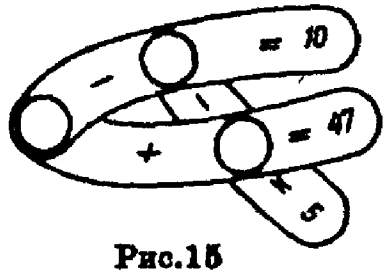


Рис.15

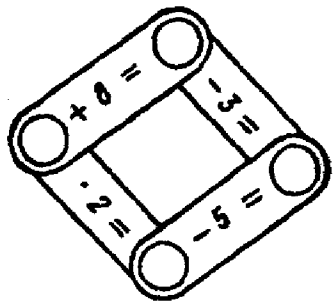


Рис.16

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Вариант 1

1. Разложите на множители многочлен:

а) $x^2 - 9c^2$; б) $27 + a^3$;

в) $x^3 - 2x^2y + xy^2$; г) $(2x + 1)^2 - 49$.

2. Докажите, что число $7^{10} - 7^9 + 7^8$ делится на 43.

3. Решите уравнение $(x + 3)(x^2 - 3x + 9) = x^3 - 3x$.

Вариант 2

1. Разложите на множители многочлен:

а) $a^2 - 16c^2$; б) $8c^3 - 1$;

в) $a^4 - 2a^3c + a^2c^2$; г) $64 - (3x - 2)^2$.

2. Докажите, что число $7^9 + 7^8 + 7^7$ делится на 57.

3. Решите уравнение $(x + 3)^2 - (x - 4)(x - 2) = 5$.

Вариант 3

1. Разложите на множители многочлен:

а) $m^2 - 25x^2$; б) $27n^3 + a^3$;

в) $m^2n^2 - 2mn^2 + n^2$; г) $49 - (2 - 5x)^2$.

2. Докажите, что число $8^9 + 8^8 + 8^7$ делится на 73.

3. Решите уравнение $(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = x^3 + 2x$.

Вариант 4

1. Разложите на множители многочлен:

а) $64a^2 - x^2$; б) $1 - 64z^3$;

в) $x^5 - 2x^4 + x^3$; г) $36x^2 - (1 - x)^2$.

2. Докажите, что число $8^8 + 8^7 - 8^6$ делится на 71.

3. Решите уравнение $(x + 1)(x^2 - x + 1) = x^3 - 2x$.

Глава IV

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 21. Уравнения с двумя переменными

До сих пор мы рассматривали уравнения с одной переменной. Однако существуют задачи, решение которых приводит к уравнениям с двумя переменными.

Задача. На 22 грн. купили несколько книг по 5 грн. и географических карт по 3 грн. Сколько купили книг и карт?

Р е ш е н и е. Пусть купили x книг и y карт. За книги заплатили $5x$ грн., а за карты $3y$ грн. Всего заплатили 22 грн., следовательно,

$$5x + 3y = 22.$$

Составили уравнение *с двумя переменными.*

Другие примеры уравнений с двумя переменными:

$$xy = 8;\quad 2x = 3y,\quad x^2 + y = 7.$$

Уравнение вида $ax + by = c$, где a, b, c — данные числа, называется *линейным уравнением с двумя переменными* x и y. Если $a \neq 0$ и $b \neq 0$, его называют *уравнением первой степени с двумя переменными.*

$5x + 3y = 22$, $x - 2{,}7y = 0$, $0x + 2y = 4$ — примеры линейных уравнений, два первых из них — уравнения первой степени с двумя переменными.

Пара чисел $x = -1$ и $y = 9$ удовлетворяет уравнению $5x + 3y = 22$, поскольку $5 \cdot (-1) + 3 \cdot 9 = 22$. А пара чисел $x = 1$ и $y = 2$ этому уравнению не удовлетворяет, поскольку $5 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \neq 22$.

Каждая *пара чисел*, удовлетворяющая уравнению с двумя переменными, называется *решением* этого уравнения. Обратите внимание: одно решение состоит из двух чисел. Корнями их не называют.

Чтобы найти решения уравнения с двумя переменными, надо подставить в уравнение произвольное значение первой переменной и, решив полученное урав-

нение, найти соответствующее значение второй переменной.

Пример. Найдите несколько решений уравнения $3x - y = 5$.

Р е ш е н и е. Если $x = 1$, то $3 \cdot 1 - y = 5$, откуда $y = -2$. Пара чисел $x = 1$ и $y = -2$ — решение данного уравнения. Его записывают еще и так: $(1; -2)$. Придавая переменной x значения 2, 3, 4, ... можно найти сколько угодно решений уравнения: (2; 1), (3; 4), (4; 7), (5; 10), ...

Каждое уравнение первой степени с двумя переменными имеет *бесконечно много решений.*

Два уравнения с двумя переменными называются *равносильными*, если каждое из них имеет те же решения, что и другое. Уравнения, не имеющие решений, также считаются равносильными. Обе части уравнения с двумя переменными можно умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число. Любой член такого уравнения можно переносить из одной части уравнения в другую, изменив его знак на противоположный. В результате получим уравнение, равносильное данному.

Например, уравнение $8x = 7 + 3(1 - 2y)$ можно преобразовать так: $8x + 6y = 10$, $4x + 3y = 5$. Каждое из этих уравнений равносильно другому.

381. Назовите уравнение с двумя переменными:

а) $3x - y = 5$; б) $x^3 + 4z = 9$;

в) $xy - 28 = 3$; г) $2y - xy = 0$;

д) $0{,}7z = 8t + 5$; е) $x - 2(3 - y) = 5$.

Какие из этих уравнений линейные, какие — первой степени?

382°. Удовлетворяют ли значения $x = 5$ и $y = -2$ уравнению $5x - 2y = 10$?

383. Какие из пар (3; 2), (4; – 3), (– 1; 4) являются решениями уравнения:

а) $2x + 7y = 20$; б) $-2t + 3z = 0$; в) $x - 4y = 16$?

384. Найдите два каких-либо решения уравнения:

а) $2x + y = 7$; б) $2x - 3z = 10$; в) $4m + 5n = 21$.

385. Замените звездочки числами так, чтобы пары (1; $*$), (2; $*$), (3; $*$), ($*$;2), ($*$; 0), ($*$; -5) удовлетворяли уравнению $x + 3y = 10$.

386. Составьте уравнение с двумя переменными, решением которого является пара чисел (2; 3).

387. Докажите, что уравнение $x^2 + y^2 = -5$ не имеет решений.

388. Имеет ли решения уравнение с двумя переменными:

а) $x^2 + y^4 = -1$; б) $x^2 - y^2 = -3$; в) $x^2 + 3y^2 = 0$?

389. Сколько решений имеет уравнение:

а) $x^2 + y^2 = 0$; б) $x^2 + (y - 2)^2 = 0$; в) $x(x^2 + y^2) = 0$?

390. Найдите пару одинаковых чисел, которая является решением уравнения $x + 3y = 36$.

Р е ш е н и е. Пусть $(c; c)$ — искомая пара чисел. Она удовлетворяет данному уравнению, поэтому $c + 3c = 36$, откуда $c = 9$.

О т в е т. (9; 9).

391. Найдите натуральные значения x и y, удовлетворяющие уравнению:

а) $4x + 3y = 7$; б) $x + 15z = 31$.

392. Есть трубы длиной 7 м и 8 м. Сколько нужно взять тех и других, чтобы проложить трубопровод длиной 67 м?

393. Найдите значение коэффициента a в уравнении $ax + 5y = 1$, если пара $x = 3$, $y = -4$ является решением этого уравнения.

§ 22. График линейного уравнения с двумя переменными

Сначала повторим некоторые известные вам из 6-го класса понятия, связанные с координатной плоскостью.

Проведем на плоскости две перпендикулярные координатные прямые x и y, пересекающиеся в начале

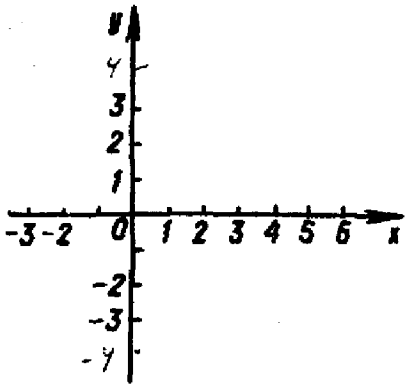


Рис.17

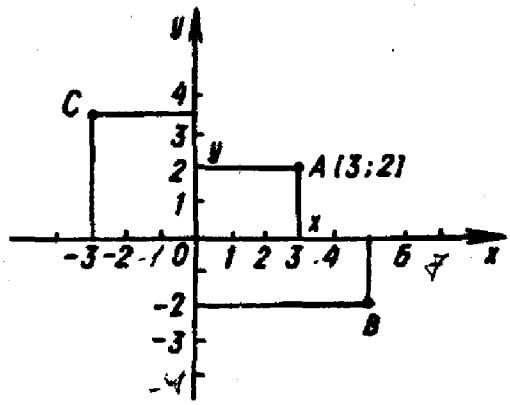


Рис.18

отсчета — точке O (рис. 17). Плоскость, на которой заданы такие координатные прямые, называется *координатной плоскостью*, прямая x — *осью абсцис*, прямая y — *осью ординат*, точка O — *началом координат*.

Каждой точке координатной плоскости соответствует пара чисел. Например, точке A (рис. 18) соответствует пара (3; 2), поскольку прямая Ax, перпендикулярная оси x, пересекает ее в точке с координатой 3, а прямая Ay, перпендикулярная оси y, пересекает ее в точке с координатой 2. Говорят, что точка A имеет *координаты* 3 и 2. Записывают: A (3; 2). Здесь 3 — *абсцисса*, 2 — *ордината* точки A. Первой всегда пишут абсциссу.

Каждой паре чисел на координатной плоскости соответствует единственная точка. На рисунке 18 показано, как обозначить, например, точки B (5; –2) и C $(-3; 3\frac{1}{2})$.

Р. Декарт
(1596—1650)

Координаты точек первым использовал французский математик Р е н е Д е к а р т (1596 — 1650). Поэтому их часто называют *декартовыми координатами*.

Теперь вернемся к уравнениям. Для примера рассмотрим уравнение $3x - 2y = 6$. Придав переменной x значения –2, –1, 0, 1, 2, 3, ..., найдем соответствующие значения переменной y. Получим решения данного

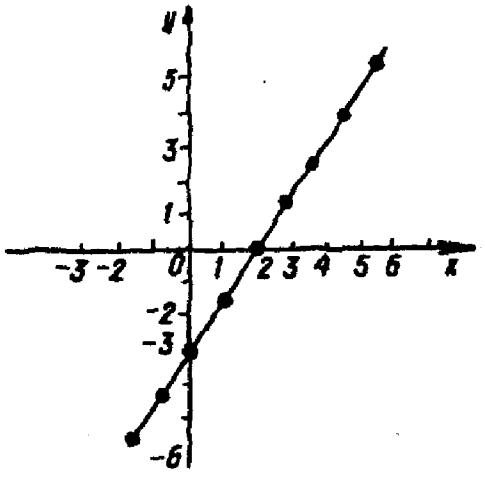


Рис. 19

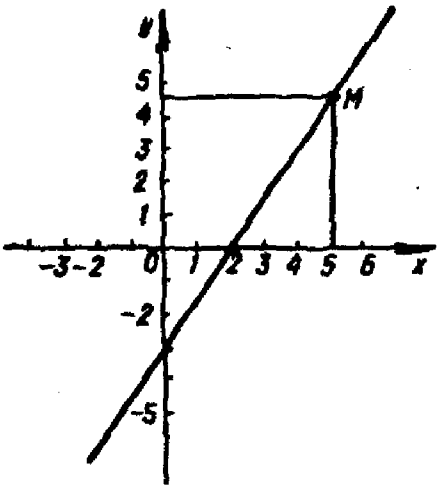


Рис. 20

уравнения (–2; –6), (–1; –4,5), (0; –3), (1; –1,5), (2; 0), (3; 1,5), ...

Если на координатной плоскости обозначить точки, соответствующие этим парам, окажется, что все они размещены на одной прямой (рис. 19). Эту прямую называют *графиком* данного уравнения. ***График каждого уравнения первой степени с двумя переменными — прямая.***

Каждая точка графика уравнения имеет координаты, удовлетворяющие данному уравнению. Например, точка M графика уравнения $3x - 2y = 6$ имеет абсциссу 5 и ординату 4,5 (рис. 20). Эти значения x и y удовлетворяют данному уравнению:

$3 \cdot 5 - 2 \cdot 4{,}5 = 6$.

Чтобы построить график уравнения первой степени с двумя переменными, достаточно найти два его решения, обозначить на координатной плоскости соответствующие им точки и провести через них прямую.

Если в уравнении $ax + by = c$ один из коэффициентов (или a, или b) равен нулю, его график — также прямая (см. задачу 404).

394. Найдите пять решений уравнения $3x + 4y = 8$ и обозначьте соответствующие им точки на координатной плоскости. Как расположены эти точки?

395. Постройте графики уравнений:

а) $x + y = 4$; б) $2x + y = 6$;

в) $-3x + 2y = 5$; г) $-x - 7y = 7$.

396. Чему равно значение c, если известно, что график уравнения $2x + 3y = c$ проходит через точку A $(6; -1)$?

397. Каким должен быть коэффициент b уравнения $4x + by = 0$, чтобы график этого уравнения проходил через точку B $(10; 8)$?

398. При каком значении a график уравнения $ax - 3y = -5$ проходит через точку M $(5; 2)$?

399. На графике уравнения $3x - 5y = 6{,}2$ взята точка с абсциссой 0,4. Какова ордината этой точки?

400. Найдите координаты точек пересечения с осями координат графика уравнения:

а) $3x + 2y = 6$; б) $x - 5y = 12$.

401°. Постройте в одной координатной плоскости графики уравнений $x - y = 3$ и $3x + y = 1$. Найдите координаты точки пересечения графиков.

402. Постройте в одной координатной плоскости графики уравнений $2x + 3y = 5$ и $2x + 3y = 10$.

403. Постройте в одной координатной плоскости графики уравнений $5x - y = 7$ и $10x - 2y = 14$.

404. Постройте график уравнения:

а) $0x + 2y = 8$; б) $3x + 0y = 15$;

в) $0x + 0y = 0$; г) $0x + 0y = 7$.

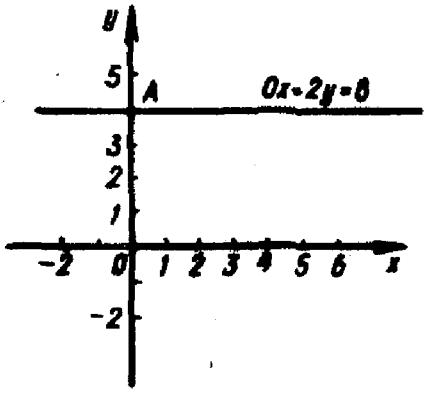


Рис. 21

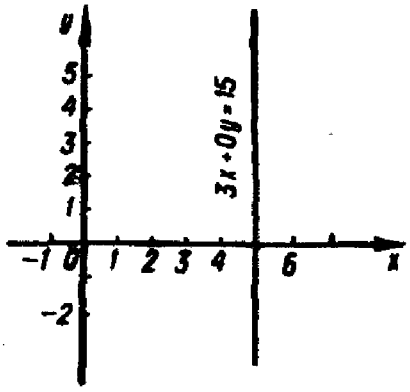


Рис. 22

Р е ш е н и е. Уравнению а) удовлетворяет каждая пара чисел $(c; 4)$, где c — произвольное число. График этого уравнения — прямая, параллельная оси x, проходящая через точку A (0; 4) (рис. 21).

Множество решений уравнения б) — бесчисленное количество пар $(5; p)$, где p — произвольное число. График этого уравнения — прямая, параллельная оси y (рис. 22).

Уравнению в) удовлетворяет каждая пара чисел, график этого уравнения — вся координатная плоскость.

Уравнение г) не имеет решений, его график — пустое множество.

405. Постройте в одной координатной плоскости графики уравнений $3x - 2y = 12$ и $5x + 3y = 1$, найдите координаты точки их пересечения. Убедитесь, что найденная пара чисел является решением каждого из данных уравнений.

§ 23. Системы уравнений

Задача. 4 кг конфет и 3 кг пряников стоят 26 грн., а 6 кг конфет и 2 кг пряников — 34 грн. Сколько стоит килограмм конфет и килограмм пряников?

Эту задачу можно решить, составив уравнение с одной переменной (составьте такое уравнение!). Попробуем решить ее другим способом, составив уравнения с двумя переменными.

Пусть килограмм конфет стоит x грн., а килограмм пряников — y грн. Тогда

$$4x + 3y = 26 \text{ и } 6x + 2y = 34.$$

Имеем два уравнения с двумя переменными. Нужно найти такие значения переменных x и y, которые удовлетворяют одновременно и первому, и второму уравнению. Иначе: нужно найти общее решение обоих уравнений.

Если требуется найти общие решения двух или нескольких уравнений, говорят, что эти уравнения образуют *систему*. Записывают систему уравнений, объединяя их фигурной скобкой:

$$\begin{cases} 4x + 3y = 26, \\ 6x + 2y = 34. \end{cases}$$

Решением системы уравнений называется общее решение всех ее уравнений.

Например, пара чисел (3; 2) является решением системы

$$\begin{cases} x + 3y = 9, \\ 2x - y = 4, \end{cases} \qquad (*)$$

поскольку $3 + 3 \cdot 2 = 9$ и $2 \cdot 3 - 2 = 4$.

Решить систему уравнений — это значит найти множество всех ее решений.

Решать системы уравнений можно *графически.*

Решим, например, систему (*). Для этого построим в одной координатной плоскости графики обоих ее уравнений (рис. 23). Координаты каждой точки прямой, являющейся графиком уравнения $x + 3y = 9$, удовлетворяют этому уравнению. Координаты каждой точки графика уравнения $2x - y = 4$ удовлетворяют этому уравнению. Построенные графики пересекаются в точке A (3; 2). Поэтому пара чисел (3; 2) — единственное решение данной системы уравнений.

Графическим способом обычно находят приближенные решения. Но, подставив значения $x = 3$ и $y = 2$ в данную систему уравнений, убеждаемся, что (3; 2) — точное решение.

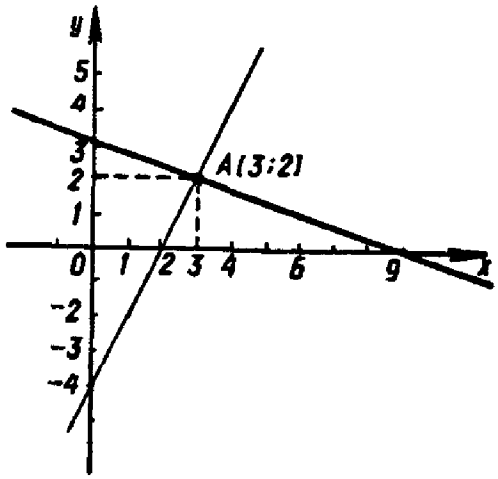


Рис. 23

Каждая ли система двух уравнений имеет только одно решение? Нет. Например, система уравнений

$$\begin{cases} 3x - 2y = 6, \\ 6x - 4y = 12 \end{cases}$$

имеет бесконечное множество решений. Ведь графики обоих этих уравнений — одна и та же прямая (убедитесь в этом самостоятельно). Следовательно, координаты каждой точки этой прямой, например, (–2; –6), (–1; –4,5), (0; – 3), (1; –1,5), (2; 0), ... — решение данной системы уравнений.

Есть и такие системы уравнений, которые не имеют ни одного решения. Графики таких уравнений — параллельные прямые (см. задачу 407).

406. Является ли пара чисел (2; –1) решением системы:

а) $\begin{cases} x + y = 1, \\ x - 2y = 6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y = 1, \\ 4x - 3y = 11; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x - y = 3, \\ 2x + y = 3? \end{cases}$

407. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x - y = 4, \\ 2x - y = -2. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Найдем координаты точек пересечения графиков уравнений системы с осями координат:

x	0	2
y	–4	0

x	0	–1
y	2	0

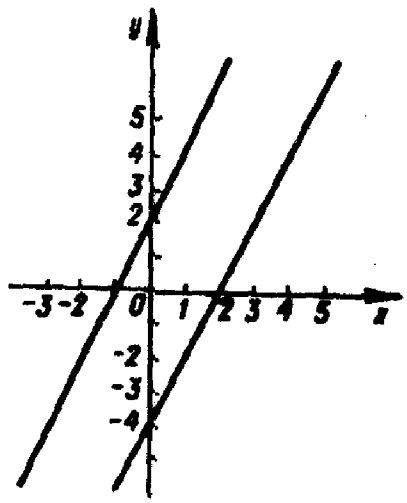


Рис. 24

Построим графики данных уравнений (рис. 24). Эти графики — параллельные прямые, они не имеют общих точек.

О т в е т. Система уравнений решений не имеет.

408. Найдите координаты точки пересечения графиков уравнений $2x + y = 0$ и $x - y = -3$.

409. Составьте систему уравнений, имеющую решение (3; 5).

410. Решите графически систему уравнений:

а) $\begin{cases} 2x - y = 2, \\ 3x - y = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y = 4, \\ x - y = 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 4x - y = 5, \\ 3x + 2y = 12; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 5x + 4y = 13, \\ 3x + 5y = 13; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 2x + \frac{1}{2}y = 6, \\ 4x + y = 12; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x - y = -2, \\ 3x - 3y = 6. \end{cases}$

411. Сколько решений имеет система уравнений:

а) $\begin{cases} x + 3y = 5, \\ 3x + 9y = 10; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - 4y = 1, \\ 2x - 8y = 3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x + y = 8, \\ y = 15? \end{cases}$

412. Не строя графиков, докажите, что система уравнений не имеет решений:

а) $\begin{cases} 8x + 2y = 15, \\ 8x + 2y = 35; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x - y = 8, \\ 3x - y = 16. \end{cases}$

413. Сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} 6x + 10y = 36, \\ 3x + 5y = 18? \end{cases}$$

Найдите три любых ее решения.

§ 24. Способ подстановки

Графический способ решения систем уравнений громоздкий и дает, вообще говоря, приближенные решения. Поэтому чаще системы решают другими способами, в частности — *способом подстановки*.

Пусть, например, нужно решить систему

$$\begin{cases} 2x - y = 4, \\ x + 3y = 9. \end{cases}$$

Выразим из второго ее уравнения переменную x через y: $x = 9 - 3y$.

Поскольку первому уравнению системы должны удовлетворять те же значения переменных, что и второму, подставим найденное выражение $9 - 3y$ вместо x в первое уравнение. Получим уравнение с одной переменной

$$2(9 - 3y) - y = 4,$$

откуда

$$18 - 6y - y = 4,$$

$$y = 2.$$

Подставив найденное значение $y = 2$ в уравнение $x = 9 - 3y$, получим соответствующее значение переменной x: $x = 9 - 3 \cdot 2 = 3$.

Таким образом, решением системы является пара чисел (3; 2).

Чтобы решить систему уравнений способом подстановки, нужно:

1) выразить из какого-нибудь ее уравнения одну переменную через другую;

2) подставить в другое уравнение системы вместо этой переменной полученное выражение;

3) решить полученное уравнение с одной переменной;

4) найти соответствующее значение второй переменной.

Способом подстановки удобно пользоваться тогда, когда коэффициент при какой-либо переменной в уравнении равен 1. Этим же способом можно решать и любую систему линейных уравнений с двумя переменными.

Пример. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x = 2(y + 6), \\ 6x + 3y = 1 + x. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Преобразовав данные уравнения, решим систему:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 12, \\ 5x + 3y = 1; \end{cases}$$

$$3x = 2y + 12,$$

$$x = \frac{2}{3}y + 4,$$

$$5\left(\frac{2}{3}y + 4\right) + 3y = 1,$$

$$\frac{10}{3}y + 20 + 3y = 1,$$

$$\frac{19}{3}y = -19,$$

$$y = -3, \quad x = \frac{2}{3}(-3) + 4 = 2.$$

О т в е т. (2; –3).

Решите способом подстановки системы уравнений 414—425.

414. а) $\begin{cases} 2x + y = 12, \\ 3x - 5y = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - 4y = 11, \\ 3x + 2y = 5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 6x - 4z = 5, \\ 4x + 1{,}5z = 1. \end{cases}$

415°. а) $\begin{cases} 2x - 3y = -3, \\ x + 3y = 21; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y = 14, \\ x - y = 8. \end{cases}$

416. а) $\begin{cases} x + z = 52, \\ x - 3z = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y = 96, \\ 3x = 2y. \end{cases}$

417. а) $\begin{cases} y - 2z = 6, \\ y + 2z = 10; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2z + 3y = 216, \\ z + y = 82. \end{cases}$

418. а) $\begin{cases} 2p + q = 11, \\ 5p - 2q = 41; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 6a - 3b = 4, \\ 2a - b = 5. \end{cases}$

419. а) $\begin{cases} 9x + 2y - 4 = 0, \\ 8x + y - 2 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5u + 7v + 3 = 0, \\ 10u - v + 6 = 0. \end{cases}$

420. а) $\begin{cases} 4x - 3y = 8, \\ 8x - 6y = 9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 0{,}5x - y = 0{,}5, \\ x - 2y = 1. \end{cases}$

421. а) $\begin{cases} 4(x-3z)+33z=50, \\ 5(x+2z)-3x=18; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 4x+7=5(x-t), \\ 3(x+6t)-9t=15. \end{cases}$

422. а) $\begin{cases} u+\frac{1}{3}(u+v-3)=14, \\ \frac{1}{3}v-\frac{1}{6}(u+v)=\frac{5}{6}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 7(2x+y)-5(3x+y)=6, \\ 3(x+2y)-2(x+3y)=-6. \end{cases}$

423*. а) $\begin{cases} \frac{1}{3}(x+y)-\frac{1}{4}(x-y)=5, \\ \frac{1}{12}(x+y)+\frac{1}{3}(x-y)=6; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \frac{1}{4}(y-1)-\frac{1}{3}(x+1)=2, \\ \frac{1}{4}(x+3)-\frac{1}{3}(y+1)=-4. \end{cases}$

424*. а) $\begin{cases} \frac{x+y}{4}-\frac{x-y}{3}=10, \\ \frac{x+y}{8}+\frac{x-y}{6}=5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \frac{x+2y}{4}=3+\frac{3x-5y}{2}, \\ \frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y=7-\frac{1}{4}(x-2y). \end{cases}$

425*. а) $\begin{cases} 0{,}2a+4b=-5-0{,}8a, \\ 2{,}5a+0{,}5b=1-\frac{1}{2}b; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 0{,}3x-2{,}8y=0{,}7(2-y), \\ 1{,}2x+1{,}3y=3-\frac{1}{7}y. \end{cases}$

426. Найдите координаты точки пересечения графиков уравнений, не выполняя построений:

а) $x+y=37$ и $x-y=5$;

б) $2x-3y=16$ и $x+2y=1$;

в) $x + 2y = 8$ и $x - 2y = 2{,}5$;

г) $4x - 7y = 4$ и $20x + 3y = 1$.

427. Докажите, что графики уравнений $4x - 7y = 3$ и $8x - 14y = 13$ — параллельные прямые.

428*. Пересекаются ли графики уравнений $2x - 3y = 10$ и $\frac{x}{3} - \frac{y}{5} = 0$?

§ 25. Способ сложения

Пусть дана система уравнений

$$\begin{cases} 8x - 3y = 34, \\ 5x + 3y = 31. \end{cases}$$

Начнем решать ее способом подстановки. Выразим из первого уравнения переменную y через x и подставим полученное выражение вместо y во второе уравнение:

$$y = \frac{1}{3}(8x - 34), \quad 5x + 3 \cdot \frac{1}{3}(8x - 34) = 31,$$

$$5x + 8x = 34 + 31.$$

Далее уже нетрудно закончить решение системы.

А нельзя ли уравнение $5x + 8x = 34 + 31$ получить другим способом? Можно. Достаточно сложить левые и правые части уравнений системы (при этом члены с переменной y уничтожатся). И, решая любую другую подобную систему, можем вместо подстановки выполнять почленное сложение уравнений. Оформлять решение будем, например, так:

$$\begin{cases} 8x - 3y = 34, \\ 5x + 3y = 31; \end{cases} \qquad 40 - 3y = 34,$$

$$13x = 65, \qquad 3y = 6,$$

$$x = 5, \qquad y = 2.$$

Ответ. (5; 2).

Так решают системы, у которых коэффициенты при какой-либо переменной — противоположные числа. А к такому виду можно привести любую систему линейных уравнений с двумя переменными.

Пример. Если дана система

$$\begin{cases} 3x + 7y = 31, \\ 2x + 9y = 12, \end{cases}$$

то, умножив обе части ее первого уравнения на 2, а второго на -3, получим систему, в которой коэффициенты при переменной x — противоположные числа. Уравнения полученной системы равносильны уравнениям данной, следовательно, она имеет те же решения, что и данная.

Оформлять решение можно так:

$$\begin{cases} 3x + 7y = 31, \\ 2x + 9y = 12; \end{cases} \quad \begin{array}{|c} 2 \\ -3 \end{array} \qquad \begin{cases} 6x + 14y = 62, \\ -6x - 27y = -36; \end{cases}$$

$$-13y = 26,$$

$$y = -2.$$

$2x + 9 \cdot (-2) = 12$, $2x = 30$; $x = 15$.

Ответ. $(15; -2)$.

Решите способом сложения системы уравнений 414—425.

Решите способом сложения системы уравнений 429—436.

429. а) $\begin{cases} x + y = 7, \\ x - y = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + 2y = 18, \\ -x + 3y = 2. \end{cases}$

430°. а) $\begin{cases} 3x - 8y = 1, \\ 4x + 8y = 20; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -5x + y = 15, \\ 5x - 2y = -35. \end{cases}$

431. а) $\begin{cases} 3x + 7y = 17, \\ 8x + 7y = 22; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x - 4y = 20, \\ 5x - 4y = 60. \end{cases}$

432. а) $\begin{cases} 8z + 3t = 7, \\ -4z - 5t = 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3m - 2n = 2, \\ 5m + 8n = 16. \end{cases}$

433. а) $\begin{cases} 10u + 7v = 51, \\ u - \frac{1}{5}v = 2\frac{2}{5}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{1}{4}x - \frac{1}{5}y = 0, \\ \frac{3}{4}x + \frac{2}{5}y = 10. \end{cases}$

434. а) $\begin{cases} 0{,}1p + 0{,}2q = 0{,}3, \\ 0{,}4p + 0{,}5q = 0{,}9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 1{,}2x - 3{,}4y = 12, \\ 2{,}5x + 1{,}4y = 25. \end{cases}$

435. а) $\begin{cases} \frac{a}{3} + \frac{b}{4} = 5, \\ a - \frac{b}{2} = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{m}{3} - \frac{n}{3} = 0, \\ m - \frac{7n}{2} = 2. \end{cases}$

436. а) $\begin{cases} \frac{1-3x}{4} - \frac{4-2p}{3} = 0, \\ 0{,}7 = 0{,}4p - 0{,}3x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{2x-1}{6} - \frac{9-5m}{8} = 0, \\ 2x = 1{,}5m + 0{,}5. \end{cases}$

437. Решите всеми известными вам способами систему уравнений:

а) $\begin{cases} 3x - y = 11, \\ 5x + 6y = 26; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x + 3y = 22, \\ -x + 7y = 10. \end{cases}$

438*. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 4\,(3x - 2) + 2\,(7 - 4x) = 20 + 2\,(y - 3), \\ 5\,(2y + 3) + 2\,(6x - y) = 3\,(5x - 3) + 31; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 5\,(x - 2y) + 33 = 2\,(4x - 3) - 2\,(3y - 5), \\ 2\,(3x - 5y) - 3\,(x - 5) = 56 - 4\,(6 + 2y)\,; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 10\,(x - y + 2) = 3y + 4\,(2 - x), \\ 36x - 4\,(y + 17) = 3\,(x - 3y) - 25; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 8\,(2x - 3y - 3) = 6x\,(4y - 3) - 3y\,(8x - 5), \\ 3\,(10x + 3y) = 9y\,(4x + 7) - 6x\,(6y + 1); \end{cases}$

д) $\begin{cases} (x - 2)^2 - (x + 3)^2 = (y - 3)^2 - (y + 2)^2, \\ (x + 2)^2 + (x - 3)^2 = 2x\,(x - 4) + 13y. \end{cases}$

§ 26. Решение задач составлением системы уравнений

Многие задачи, особенно если нужно найти значение двух величин, удобно решать с помощью систем уравнений.

Задача. За 6 тетрадей и 5 блокнотов заплатили 2,3 грн. Сколько стоит одна тетрадь и один блокнот, если 3 тетради дороже 4 блокнотов на 0,5 грн.?

Р е ш е н и е. Допустим, что тетрадь стоит x грн., а блокнот — y грн. За 6 тетрадей заплатили $6x$ грн., а за 5 блокнотов — $5y$ грн. Всего за них заплатили 2,3 грн., следовательно,

$$6x + 5y = 2{,}3.$$

Поскольку 3 тетради дороже четырех блокнотов на 0,5 грн., получим еще одно уравнение:

$$3x - 4y = 0{,}5.$$

Переменные x и y в обоих уравнениях обозначают одни и те же цены. Следовательно, нужно решить систему этих двух уравнений:

$$\begin{cases} 6x + 5y = 2{,}3, \\ 3x - 4y = 0{,}5; \end{cases} \quad \Big| \; -2 \qquad \begin{cases} 6x + 5y = 2{,}3, \\ -6x + 8y = -1; \end{cases}$$

$$13y = 1{,}3,$$

$$y = 0{,}1,$$

$$3x - 4 \cdot 0{,}1 = 0{,}5, \quad 3x = 0{,}9, \quad x = 0{,}3.$$

О т в е т. 30 к., 10 к.

Эту задачу можно также решить составлением уравнения с одной переменной. Вообще, любую задачу, которая решается составлением системы линейных уравнений, можно решить и с помощью уравнения с одной переменной. Только систему уравнений в большинстве случаев составить легче, чем уравнение с одной переменной.

Решите составлением системы уравнений задачи 58—68 и 439—469.

439. Два карандаша и три тетради стоят 1,3 грн., а три карандаша и две тетради — 1,2 грн. Сколько стоит один карандаш и одна тетрадь?

440°. Купили 9 м ткани двух сортов по цене 40 грн. и 30 грн. за метр. За всю покупку заплатили 330 грн. Сколько купили ткани каждого сорта?

441. На строительстве работали 50 каменщиков и плотников. Со временем количество каменщиков увеличилось в 2 раза, а плотников в 3 раза и всех стало

130. Сколько сначала было каменщиков и плотников на строительстве?

442. Скорость моторной лодки по течению 23 км/ч, а против течения 17 км/ч. Найдите собственную скорость лодки и скорость течения реки.

443. Туристы проехали 640 км, из них 7 ч на поезде и 4 ч на автобусе. Найдите скорость поезда, если она на 5 км/ч больше скорости автобуса.

444. Два туриста вышли одновременно из двух городов, расстояние между которыми 38 км, и встретились через 4 ч. С какой скоростью шел каждый, если первый до встречи прошел на 2 км больше второго?

445. Найдите два числа, если их полусумма равна 71, а полуразность 31.

446. Половина одного числа на 4 больше трети второго, а половина второго на 18 больше четверти первого. Найдите эти числа.

447. 20% первого числа на 15 меньше, чем 30% второго, а 40% первого на 2 больше 20% второго. Найдите эти числа.

448. Разность двух чисел 10, а разность их квадратов 240. Найдите эти числа.

449. Найдите два числа, зная, что их сумма равна 2,5 и разность квадратов 2,5.

450. Сумма квадратов двух отрицательных чисел равна 74, а разность их квадратов 24. Найдите эти числа.

451. Разность квадратов двух чисел и квадрат их разности равны соответственно 275 и 121. Найдите эти числа.

452°. На двух полках 50 книг. Если половину книг второй полки переложить на первую, то на ней станет книг в 4 раза меньше, чем на первой. Сколько книг на каждой полке?

453. Если рассадить детей по два за стол, то не хватит трех столов. Если рассадить их по три, то один стол окажется лишним. Сколько было детей и сколько столов?

454. Стайка воробьев рассаживается на ветках дерева. Если они сядут по одному на ветку, то двум

воробьям не хватит свободных веток. Если же воробьи рассядутся по два, то две ветки окажутся свободными. Сколько воробьев было и сколько веток они занимали?

455. Сколько лет отцу и сыну, если 8 лет назад отец был старше сына в 8 раз, а 5 лет назад — в 5 раз?

456. Сколько лет сестре и брату,
если вместе им — семнадцать,
а всего лишь год назад
вдвое старше сестры был брат?

457. С т а р и н н а я г р е ч е с к а я з а д а ч а. Нагруженные осел и мул идут медленно. Осел жалуется на тяжелую ношу, мул ему отвечает: «Чего ты жалуешься? Если бы я взял один твой мешок, то моя ноша стала бы в два раза тяжелее твоей. А если бы ты взял один мой мешок, то твоя ноша равнялась бы моей». По скольку мешков несли осел и мул?

458. С т а р и н н а я к и т а й с к а я з а д а ч а. 5 волов и 2 барана стоят 11 таелов, а 2 вола и 8 баранов — 8 таелов. Сколько баранов можно купить за деньги, полученные от продажи 5 волов?

459. С т а р и н н а я к и т а й с к а я з а д а ч а. Сколько в клетке фазанов и кроликов, если вместе у них 35 голов и 94 ноги?

460. Периметр равнобедренного треугольника равен 24 см, а сумма двух неравных сторон 17 см. Найдите длины сторон треугольника.

461. Одна сторона равнобедренного треугольника на 5 см длиннее другой. Найдите эти стороны, если периметр треугольника 29 см.

462°. Один угол треугольника равен 70°, а разность двух других 50°. Найдите меры этих углов.

463. Периметр прямоугольника больше одной его стороны на 53 см, а другой — на 52 см. Найдите периметр прямоугольника.

464*. Две бригады лесорубов заготовили в январе 1900 куб. м древесины, а в феврале 2100 куб. м. Известно также, что в феврале первая бригада заготовила древесины на 11%, а вторая — на 10% больше,

чем в январе. По скольку кубометров древесины заготовили они в феврале?

465. Веревку длиной 22 м разрезали на две части так, что одна из них на 20% длиннее другой. Найдите их длины.

466. Веревку длиной 22 м разрезали на две части так, что одна из них на 20% короче другой. Найдите их длины.

467*. Два мастера, работая вместе, могут закончить определенную работу за 12 дней. Если же первый мастер будет работать 4 дня, а второй 6 дней, то они выполнят только 40% всей работы. За сколько дней может выполнить всю работу каждый мастер, работая отдельно?

468. На первом складе угля на 800 т больше, чем на втором. После того как с первого забрали 60% угля, а со второго 50%, на первом осталось на 200 т больше, чем на втором. Сколько угля осталось на каждом складе?

469*. Имеется два сплава меди и цинка. Первый содержит 10% цинка, второй 30%. Сколько нужно взять первого и второго, чтобы, сплавив их, получить 400 т сплава, содержащего 25% цинка?

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Вариант 1

1. Систему уравнений а) решите графически, а б) — любым способом:

а) $\begin{cases} 2x - y = 4, \\ x - y = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3{,}1x + 0{,}7y = 5{,}2, \\ 5{,}2x + 0{,}6y = 7. \end{cases}$

2. Поле площадью 80 га разделили на две части так, что площадь одной из них на 2 га больше половины площади другой. Найдите площадь каждой части.

Вариант 2

1. Систему уравнений а) решите графически, а б) — любым способом:

а) $\begin{cases} 4x - 2y = 6, \\ x + y = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2{,}2x + 0{,}5y = 3{,}2, \\ 1{,}2x + 0{,}8y = 2{,}8. \end{cases}$

2. Поле площадью 100 га разделили на две части так, что площадь одной из них на 5 га меньше половины площади другой. Найдите площадь каждой части.

Вариант 3

1. Систему уравнений а) решите графически, а б) — любым способом:

а) $\begin{cases} x - 2y = 3, \\ x + y = -3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 1{,}5x + 0{,}3y = 4{,}5, \\ 2x - 1{,}7y = 6. \end{cases}$

2. Проволоку длиной 40 м разрезали на две части так, что одна из них оказалась на 4 м длиннее половины другой. Найдите длину каждой части.

Вариант 4

1. Систему уравнений а) решите графически, а б) — любым способом:

а) $\begin{cases} 3x - 2y = 7, \\ x + y = 4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 1{,}7x + y = 4{,}4, \\ 3{,}5x - 0{,}8y = 6{,}2. \end{cases}$

2. Проволоку длиной 50 м разрезали на две части так, что одна из них оказалась на 1 м короче половины другой. Найдите длину каждой части.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ (ИТОГОВОЙ)

Вариант 1

1. Упростите выражение $(a + 3)^2 - (2 - a)^2$ и найдите его числовое значение при $a = 2{,}8$.

2. Докажите тождество $(2n + 1)^2 - 8n = (2n - 1)^2$.

3. Периметр прямоугольника равен 84 см. Найдите длины его сторон, если одна из них на 10% длиннее другой.

Вариант 2

1. Упростите выражение $(6 - x)^2 - (36 + x^2)$ и найдите его числовое значение при $x = 3{,}4$.

2. Докажите тождество $(5n - 2)^2 + (2n + 5)^2 = 29\,(n^2 + 1)$.

3. Периметр прямоугольника равен 76 см. Найдите

длины его сторон, если одна из них на 10% короче другой.

Вариант 3

1. Упростите выражение $(c - 4)^2 - (c^2 + 16)$ и найдите его числовое значение при $c = 2{,}7$.

2. Докажите тождество $(3a + 2)^2 - (2a + 3)^2 = 5(a^2 - 1)$.

3. Из города в село велосипедист ехал со скоростью 8 км/ч, а возвращался обратно со скоростью 10 км/ч, поэтому на тот же путь затратил на полчаса меньше. Найдите расстояние между городом и селом.

Вариант 4

1. Упростите выражение $(2z - 1)^2 - (1 + 4z)$ и найдите его числовое значение при $z = 3{,}6$.

2. Докажите тождество $(3 + 4c)^2 + (4 - 3c)^2 = 25(c^2 + 1)$.

3. Найдите длины сторон равнобедренного треугольника, если его периметр равен 124 см, а основание больше боковой стороны на 10%.

Задачи повышенной трудности

470. Из корзины взяли половину всех яиц, затем — половину остатка, затем половину нового остатка, наконец — половину нового остатка. После этого в корзине осталось 10 яиц. Сколько яиц было в корзине сначала?

471. Сколько метров лент купила бабушка для своих внучек, если старшей она дала без полметра половину всех лент, средней — половину остатка и еще полметра, а самой меньшей — оставшиеся ленты: половину нового остатка и еще метр?

472. Разность двух чисел 35. От деления большего на меньшее выходит в частном 4 и в остатке 2. Найдите эти числа.

473. Два ученика хотели купить книгу, стоимость которой превышала количество денег одного ученика на 35 к., другого — на 40 к. Когда они отдали все свои

деньги, то получили сдачу, равную 0,4 стоимости книги. Сколько стоила книга?

474. Несколько человек, истратив 40 000 грн., решили уплатить их поровну. Если бы их было на 3 меньше, то каждому пришлось бы уплатить в 2,5 раза больше. Сколько было человек? А если бы они истратили a грн.?

475. Из пункта A связной доставил донесение в пункт B за 35 мин. На обратном пути он увеличил скорость на 0,6 км/ч, поэтому потратил на дорогу 30 мин. Найдите расстояние от A до B.

476. В 8 ч утра из села в город отправился велосипедист. Пробыв в городе 4,8 ч, он выехал обратно и в 13 ч вернулся в село. Найдите расстояние между городом и селом, если в город он ехал со скоростью 12 км/ч, а возвращался со скоростью 10 км/ ч.

477. По окружности, длина которой 100 м, движутся два тела. Они встречаются через каждые 20 с, двигаясь в одном направлении, и через каждые 4 с, двигаясь в противоположных направлениях. Найдите скорость каждого тела.

478. Электропоезд прошел вдоль светофора за 5 с, а вдоль платформы длиной 150 м — за 15 с. Найдите его скорость.

479. Один сплав состоит из двух металлов, массы которых относятся, как 1:2, а второй содержит те же металлы, но массы их относятся, как 3:4. Сколько частей каждого сплава нужно взять, чтобы получить третий сплав, в котором массы тех же металлов относились бы, как 15:22?

480. Задача из фольклора США. Мэри 24 года. Это в 2 раза больше, чем было Энни, когда Мэри было столько лет, сколько теперь Энни. Сколько лет Энни?

481. Задача из австралийского фольклора. Отец предложил сыновьям Альфреду, Джону и Чарльзу отару овец распределить так: Альфред получит на 20% больше Джона и на 25% больше Чарльза. Джон получит 3600 овец. Сколько овец получит Чарльз?

482. Задача из фольклора Франции. Заплатив за ужин в ресторане, Мэтивье обнаружил, что у него осталась пятая часть денег, которые он имел при себе. Причем сантимов осталось столько, сколько вначале было франков (1 франк = 100 сантимов), а франков осталось в 5 раз меньше, чем вначале было сантимов. Сколько заплатил Мэтивье за ужин?

483. Задача из турецкого фольклора. Старый Исхан имел детей, внуков, правнуков и праправнуков. Всего их вместе с Исханом было 2801. Праправнуки были еще маленькими и не имели детей, а все остальные имели по одинаковому количеству детей, и все дети были живы и здоровы. Сколько детей имел старый Исхан?

484. Задача из болгарского фольклора. Пастух пасет стадо из 100 голов, за что получает 100 левов. Сколько в стаде волов, коров и телят, если за одного вола он получает 10 левов, за корову — 5 левов, а за теленка — 0,5 лева?

485. Сколько раз нужно взять слагаемым число a, чтобы получить a^{20}?

486. Упростите выражение $(3 + 1)(3^2 + 1)(3^4 + 1) \times (3^8 + 1)(3^{16} + 1)$.

Контрольные вопросы

1. Что такое уравнение? Что такое корень уравнения?
2. Что значит решить уравнение?
3. Какие уравнения называются равносильными?
4. Сформулируйте основные свойства уравнений.
5. Как возникло название науки «алгебра»?
6. Сформулируйте определение линейного уравнения.
7. Приведите примеры числовых выражений и выражений с переменными.
8. Какие выражения называют рациональными, целыми?
9. Что такое степень, основание степени, показатель степени?

10. Какие выражения называют тождественно равными или тождественными?

11. Что такое тождество? Приведите примеры.

12. Сформулируйте основное свойство степени.

13. Сформулируйте правило умножения степеней.

14. По какому правилу возводят степень в степень?

15. По какому правилу возводят в степень произведение?

16. Что такое одночлен? одночлен стандартного вида?

17. Что такое коэффициент одночлена?

18. Сформулируйте правило возведения одночлена в степень.

19. Что такое многочлен, двучлен, трехчлен?

20. Как записывают многочлены в стандартном виде?

21. Как складывают многочлены? Как вычитают многочлены?

22. Сформулируйте правило умножения многочлена на одночлен.

23. Сформулируйте правило умножения многочленов.

24. Запишите и прочитайте формулу разности квадратов.

25. Запишите и прочитайте формулу квадрата двучлена.

26. Что означает разложить многочлен на множители?

27. Назовите важнейшие способы разложения многочлена на множители.

28. Объясните на примере суть способа группировки.

29. Запишите и прочитайте формулу разности кубов, суммы кубов.

30. Зачем преобразовывают выражения? Приведите примеры.

31. Сформулируйте определение линейного уравнения с двумя переменными.

32. Что такое решение уравнения с двумя переменными?

33. Что такое координатная плоскость? ось абсцисс? ось ординат?

34. Что значит высказывание «точка A имеет координаты a и b»?

35. Что значит запись $M\ (x\ ;\ y)$?

36. Что представляет собой график линейного уравнения с двумя переменными?

37. Когда говорят, что данные уравнения образуют систему?

38. Что называют решением системы уравнений с двумя переменными?

39. Что значит решить систему уравнений с двумя переменными?

40. В чем состоит смысл графического способа решения системы уравнений?

41. Объясните на примере смысл способа подстановки.

42. Как решают системы уравнений способом сложения?

8 КЛАСС

Глава V

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

§27. Деление степеней и одночленов

В курсе алгебры 7-го класса мы ознакомились с целыми выражениями, научились складывать и вычитать их, умножать и возводить в степень. Теперь рассмотрим, как можно делить выражения.

Разделить выражение A на выражение B значит найти такое выражение X, что $X \cdot B = A$.

Примеры. $a^7 : a^4 = a^3$, поскольку $a^3 \cdot a^4 = a^7$; $x^{12} : x^{11} = x$, так как $x \cdot x^{11} = x^{12}$.

Вообще, если a — отличное от нуля число, а m и n — натуральные числа, причем $m > n$, то

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Ведь по правилу умножения степеней $a^{m-n} \cdot a^n = a^{m-n+n} = a^m$.

Из тождества $a^m : a^n = a^{m-n}$ следует правило.

При делении степеней с одинаковыми основаниями основание оставляют без изменения, а из показателя степени делимого вычитают показатель степени делителя.

Пользуясь этим правилом, можно сразу писать, например:

$$6^9 : 6^7 = 6^2,\ a^8 : a^3 = a^5,\ (-x)^{15} : (-x)^8 = (-x)^7.$$

Если $a \neq 0$, то $a^m : a^m = 1$. Чтобы тождество $a^m : a^n = a^{m-n}$ распространялось и на этот случай, в математике договорились считать, что при любом значении a, отличном от нуля, $a^0 = 1$.

Примеры. $7^0 = 1$, $3{,}5^0 = 1$, $(-8)^0 = 1$.

Рассмотрим еще, как можно делить одночлены.

$$12a^8 : 6a = 2a^2, \text{ т. к. } 2a^2 \cdot 6a = 12a^8;$$
$$15x^2y : 5xy = 3x, \text{ т. к. } 3x \cdot 5xy = 15x^2y;$$
$$-a^2z^3 : 2az^3 = -\frac{1}{2}a, \text{ т. к. } -\frac{1}{2}a \cdot 2az^3 = -a^2z^3.$$

Следовательно, ***чтобы разделить одночлен на одночлен, нужно: 1) разделить коэффициент делимого на коэффициент делителя; 2) к полученному частному приписать множителями каждую переменную делимого с показателем, равным разности показателей этой переменной в делимом и делителе.***

Пример. Разделите одночлен $8a^5m^2x^4$ на $4am^2x^2$.

Р е ш е н и е. Делим 8 на 4, a^5 на a, m^2 на m^2 и x^4 на x^2. Получим соответственно 2, a^4, 1 и x^2. Следовательно,

$$8a^5m^2x^4 : 4am^2x^2 = 2a^4x^2.$$

1[1]. Вычислите:

а) $2 \cdot 6^2$; б) $\left(-2 \cdot \frac{1}{4}\right)^3$; в) $5 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2$; г) $(-3)^2 \cdot 2$;

д) $-3^2 \cdot 2$.

2. Выполните действия:

а) $1{,}2 \cdot 10^3 \cdot 5$; б) $(30 - 3^3)^4$; в) $2^4 \cdot 5^4$.

3. Упростите выражение:

а) $x^5 \cdot x^{11} \cdot y^8$; б) $(a^4)^4 \cdot a$; в) $(ab)^6 \cdot b^2$; г) $-3xy^3 \cdot 2xy^2$;

д) $(-2a^4b)^8$; е) $(-x^5y^2)^4$; ё) $(2ax)^2 \cdot (5a^2x)^3$.

4. Выполните действия:

а) $7x^2 - 2x + (5 + 11x - 6x^2)$;

б) $8ab + 7b - (4ab + 7b - 3)$;

в) $2a^3(4a^2 + 3a)$;

г) $(x - 1)(x^2 - 2x + 2)$;

д) $(x - 2)(x + 2)$;

е) $(3a - b)(3a + b)(9a^2 + b^2)$.

5. Представьте в виде многочлена выражение:

а) $7x^2 - 2x(3x - y)$;

[1] Упражнения 1—8 предлагаются для повторения.

б) $(a + 2)(a - 5) + 3a$;

в) $3x(x - 6) + (2x^2 + 18x - 4)$;

г) $(a - 2)(a + 3) + 2a(1 - a)$;

д) $(x - y)(x + y) - x(x - 3)$;

е) $(b + 1)^2 + 3b(2b - 1)$;

ё) $y(y + 2x) - (x + y)^2$;

ж) $(b + 4)^2 - (b - 3)(b + 3)$.

6. Разложите на множители выражение:

а) $x^2 - 16$; б) $x^2 - 9y^4$;

в) $x^2 - 6x + 9$; г) $a^3 - 4a$;

д) $3a^2 - 6ab + 3b^2$; е) $2x + 2y - ax - ay$.

7. Найдите значение выражения:

а) $2a - b$ при $a = \frac{1}{4}$, $b = -\frac{1}{3}$;

б) $0{,}5x + 1{,}7$ при $x = -5$;

в) $5a^2b^3x^2$ при $a = 0{,}5$, $b = 2$, $x = 11$.

8. Решите уравнение:

а) $3{,}5 - 3x = x - 4{,}5$;

б) $3x - (x + 2) = 5$;

в) $5 - 3(x + 1{,}5) = 2(x + 3)$;

г) $9x - 3(x + 1{,}5) = 4x + 0{,}5$.

9°. Вычислите:

а) $2^8 : 2^4$; б) $0{,}4^3 : 0{,}4$; в) $3^{10} : 9$;

г) $3{,}75^8 : 3{,}75^7$; д) $\left(-\frac{2}{3}\right)^6 : \left(-\frac{2}{3}\right)^4$; е) $\left(1\frac{1}{2}\right)^5 : \left(1\frac{1}{2}\right)^4$.

10. Найдите частное:

а) $x^8 : x^3$; б) $m^{10} : m^4$; в) $n^5 : n$;

г) $p^{12} : p$; д) $x^{10} : x^9$; е) $c^5 : c^5$.

11. Разделите:

а) $18a^4x$ на $9a$; б) $-9a^2cx^4$ на $-3ax^2$.

12°. Выполните деление:

а) $3a^5 : a^2$; б) $6m^8 : 3m^3$; в) $2a^{10} : 2a$; г) $\frac{2}{3}a^2z^3 : \frac{1}{3}az^3$;

д) $0{,}8x^5y^8 : 0{,}2xy$; е) $-2\frac{1}{5}abcx : 2{,}2ax$.

13°. Вычислите значение выражения:

а) $(3^5 - 7)^0$; б) $17^0 + 15$; в) $(8^0 - 2)(2{,}5^7 - 3)^0$.

14. Найдите значение выражения:

а) $12m^5 : 6m^3$ при $m = -5$;

б) $x^4 : 2x^3$ при $x = 0{,}8$.

15. Выполните деление:

а) $(x + 2)^4 : (x + 2)^3$; б) $(2a + 3)^8 : (2a + 3)^6$.

§ 28. Деление и дроби

Деление двух целых выражений не всегда можно выполнить нацело. Например, частные $a^3 : a^5$, $4xy^2 : 2yz$ нельзя записать в виде целых выражений. Деление одночленов нельзя выполнить нацело, если в делителе есть переменная, которой нет в делимом, или если показатель степени какой-либо переменной в делителе больше показателя степени той же переменной в делимом.

Если частное от деления одного выражения на другое не является целым выражением, то его записывают в виде дроби. Например,

$$2 : 3 = \frac{2}{3},\ a^3 : a^5 = \frac{a^3}{a^5},\ 2ax : 3bx^2 = \frac{2ax}{3bx^2},$$

$$ax : (a + x) = \frac{ax}{a + x}.$$

Дробью называют частное от деления двух выражений, записанное с помощью дробной черты.

Какими бы не были выражения A и B, их частное $\frac{A}{B}$ — дробь. Выражения A и B — *члены* этой *дроби*, A — *числитель*, B — *знаменатель*.

Как и другие выражения, дроби бывают *числовые* и *с переменными*.

Например, дроби $\frac{5}{7}$, $\frac{-3}{0{,}4}$, $\frac{2^2 + 3^2}{4^2 + 5^2}$ — числовые выра-

жения, а $\frac{ab}{x}$, $\frac{4m}{m+1}$, $\frac{a-2b}{a+b}$ — выражения с переменными. *Обыкновенная дробь* — частный вид дроби. Это — дробь, члены которой натуральные числа.

Дроби с переменными имеют числовые значения не при всех значениях переменных. Например, при $a = 5$

$$\frac{2a+3}{a-5} = \frac{2 \cdot 5 + 3}{5-5} = \frac{13}{0}.$$

Запись $\frac{13}{0}$ — не число, т. к. на 0 делить нельзя. Следовательно, дробь $\frac{2a+3}{a-5}$ при $a = 5$ не имеет числового значения. При всех других значениях a она имеет числовые значения. Говорят, что для данной дроби *допустимыми* являются все значения переменной a, кроме $a = 5$.

Для переменных, входящих в знаменатель дроби, допустимыми являются только те значения, которые не обращают его в нуль.

Рассмотрим две дроби:

$$\frac{6}{a} \text{ и } \frac{6(a-3)}{a(a-3)}.$$

Составим таблицу их значений при таких a: –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

a	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6	7
$\frac{6}{a}$	–1,5	–2	–3	–6		6	3	2	1,5	1,2	1	$\frac{6}{7}$
$\frac{6(a-3)}{a(a-3)}$	–1,5	–2	–3	–6		6	3		1,5	1,2	1	$\frac{6}{7}$

Как видно из таблицы, при значениях a, равных –4, –3, –2, –1, 1, 2, 4, 5, 6, 7, обе дроби имеют равные числовые значения. Равны они и при других значениях переменной a, кроме 0 и 3. Значение $a = 0$ недопустимо для обеих рассматриваемых дробей, значение $a = 3$ недопустимо для второй дроби. При всех допустимых значениях переменной a все соответствующие числовые значения этих дробей равны.

Два выражения, соответствующие числовые зна-

[illegible] которых равны при всех допустимых значениях переменных, называются *тождественно равными* или *тождественными*.

Это определение от подобного определения для целых выражений отличается только словом «допустимых». Говоря о целых выражениях, это слово можно опускать, поскольку для них все значения переменных допустимы.

Два тождественных выражения, соединенные знаком равенства, образуют *тождество*. Замена одного выражения другим, тождественным ему, называется *тождественным преобразованием* данного выражения.

16. Запишите в виде дроби частное от деления:
а) 2 на 7; б) x на y; в) $3m$ на c;
г) $2x$ на $3y$; д) x^2 на $1 + x$; е) $4ab$ на $(a + b)^2$.

17. Запишите дробь, у которой: а) числитель $2c$, знаменатель $3p$; б) числитель 1, знаменатель $x - y$; в) числитель z^2, знаменатель $2 + z^2$.

18. Вычислите:
а) $\frac{5^8}{5^6}$; б) $\frac{0{,}3^{10}}{0{,}3^7}$; в) $\frac{(-3)^7}{(-3)^5}$; г) $\frac{-0{,}5^5}{(-0{,}5)^6}$; д) $\frac{3{,}4^0}{2^5 \cdot 5^2}$.

19. При каких значениях переменных не имеет числового значения дробь:
а) $\frac{m}{n}$; б) $\frac{2}{a-3}$; в) $\frac{x+p}{x+4}$; г) $\frac{3c-8}{3c+8}$?

20. Докажите, что дробь $\frac{m}{m^2+1}$ имеет числовые значения при всех значениях m.

Р е ш е н и е. При любом рациональном значении m число m^2 неотрицательно, а $m^2 + 1$ положительно. Знаменатель данной дроби при каждом значении m не равняется 0. Следовательно, при любом значении m данная дробь имеет числовое значение.

21. Приведите примеры дробей, знаменатели которых равны нулю, если: а) $x = 5$; б) $z = -1$; в) $t = 0$; г) $x = 0$ или $x = -3$.

22. Какие значения x допустимы для дроби:

а) $\frac{1}{x-5}$; б) $\frac{2}{5-x}$; в) $\frac{3x}{x^2-4}$; г) $\frac{x-3}{x^2+3}$?

23°. При каких значениях переменных не имеет числового значения дробь:

а) $\frac{3a}{a^2-16}$; б) $\frac{1}{x(x^2-9)}$; в) $\frac{m}{(m^2-1)(m^2-4)}$; г) $\frac{a^0}{a^2+1}$?

24°. Найдите значение дроби:

а) $\frac{x}{2x^2-10}$ при $x = 2{,}5$;

б) $\frac{2x}{x^2-y^2}$ при $x = -12$ и $y = 13$.

25°. Заполните таблицу:

a	-2	-1	0	1	2	3	4	10
$\frac{2}{a-3}$								
$\frac{2a}{a^2-3a}$								

Какие значения a недопустимы для дроби $\frac{2}{a-3}$? А для дроби $\frac{2a}{a^2-3a}$? Равны ли значения этих дробей при $a = 100$?

26. Можно ли считать тождественными дроби $\frac{a}{a-2}$ и $\frac{a^2}{a^2-4}$; $\frac{a}{a-2}$ и $\frac{a^2}{(a-2)^2}$?

27. Является ли тождеством равенство:

а) $\frac{a^5}{a^4} = a$; б) $\frac{m^5}{m^2} = m^3$; в) $\frac{6x^3}{3x} = 2x^2$?

28. Докажите, что равенство $\frac{a^2-4}{a-2} = a + 2$ — тождество.

29. При каких значениях c значение дроби $\frac{c+2}{5}$ равно: а) 1; б) 0; в) -1; г) 2; д) -100?

30. При каких значениях переменных равно нулю значение дроби:

а) $\frac{x-3}{8}$; б) $\frac{a+5}{14}$; в) $\frac{2x+3}{3x}$; г) $\frac{x(x-3)}{x^2+2x}$?

31. Докажите, что при любом значении x значение дроби $\frac{5}{x^2+3}$ положительно, а значение дроби $\frac{x^2}{-3-x^2}$ отрицательно.

32. Пользуясь калькулятором, найдите значение дроби $\frac{2x^2+3}{3x}$ при: а) $x = 2{,}75$; б) $x = 21{,}8$.

33. Решите уравнение:

а) $\frac{2x+3}{5} = 7$; б) $\frac{x-3}{4} = \frac{2-3x}{5}$.

34. Является ли значение $x = 15$ корнем уравнения:

а) $\frac{30}{x} = 2$; б) $\frac{1}{x-8} = \frac{1}{7}$; в) $\frac{x+15}{x-15} = 0$?

§ 29. Основное свойство дроби

Вспомним основное свойство обыкновенной дроби. Если числитель и знаменатель обыкновенной дроби умножить на одно и то же натуральное число, то получим равную ей дробь. Другими словами: при любых натуральных a, b и m

$$\frac{am}{bm} = \frac{a}{b}.$$

Это равенство — тождество. Докажем его.

Пусть a, b, m — произвольные рациональные числа, причем $b \neq 0$ и $m \neq 0$. Тогда $\frac{a}{b} = r$, где r — некоторое рациональное число. По определению деления $a = br$. Умножив обе части этого равенства на отличное от нуля число m, получим равенство $am = bm \cdot r$, откуда по определению деления $\frac{am}{bm} = r$. Следовательно, если $b \neq 0$ и $m \neq 0$, то $\frac{am}{bm} = \frac{a}{b}$.

Доказанное тождество выражает основное свойство дроби: ***если числитель и знаменатель дроби умножить на одно и то же выражение, то получим дробь, тождественно равную данной.***

Основное свойство дроби дает возможность заменить дробь вида $\frac{am}{bm}$ тождественно равной ей дробью $\frac{a}{b}$. Такое

преобразование называют *сокращением дроби*. Например,

$$\frac{cx^3}{ax^3} = \frac{c}{a}; \quad \frac{5a^2m^3x}{10m^4} = \frac{a^2x}{2m}.$$

Первую из этих дробей сократили на x^3, а вторую — на $5m^3$.

Если члены дроби многочлены, то перед сокращением дроби их часто приходится раскладывать на множители. Иногда перед сокращением дроби изменяют знак числителя или знаменателя, изменив соответственно и знак перед дробью.

Примеры.

$$\frac{2ax - 4a}{x^2 - 4} = \frac{2a(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{2a}{x+2},$$

$$\frac{m^2 - 1}{1 - m} = -\frac{(m-1)(m+1)}{m-1} = -\frac{m+1}{1} = -m - 1.$$

Примечание. Последнее преобразование и равенство $\frac{m^2 - 1}{1 - m} = -m - 1$ верны только при $m \neq 1$. Однако, чтобы не усложнять решение упражнений, подобные условия можно не указывать. Договоримся любую дробь рассматривать только при допустимых значениях ее переменных.

Сократите дроби 35—47.

35. а) $\frac{4}{18}$; б) $\frac{120}{40}$; в) $\frac{15}{15}$; г) $\frac{6}{30}$.

36. а) $\frac{2a}{4b}$; б) $\frac{a^5}{a^7}$; в) $\frac{x}{x^4}$; г) $\frac{4a}{a}$.

37. а) $\frac{6a^2}{12a^3}$; б) $\frac{3c}{15c^4}$; в) $\frac{7b^3}{14b^3}$; г) $\frac{18}{9a^2x}$.

38. а) $-\frac{6}{12}$; б) $\frac{130}{-70}$; в) $\frac{-25}{-30}$; г) $\frac{0{,}5}{0{,}2}$.

39. а) $\frac{a^3}{-a^5}$; б) $\frac{-c^3}{c^5}$; в) $\frac{-x}{-xa}$; г) $\frac{-2a^2}{-a}$.

40. а) $\frac{12^{10}}{12^{12}}$; б) $\frac{35^5}{-35^4}$; в) $\frac{0{,}3^8}{0{,}3^{11}}$; г) $\frac{(-0{,}4)^4}{-0{,}4^4}$.

41°. а) $\frac{7a^2b}{21ab^3}$; б) $\frac{35xz^5}{7xz^5}$; в) $\frac{25ax^2}{75a^3x}$; г) $\frac{5^3cm}{5^0c^2m}$.

42. а) $\frac{x(a-2)}{x(b+2)}$; б) $\frac{mp(m-p)}{m^2p(m+p)}$; в) $\frac{27x^2(x+1)}{9x(x+1)}$.

43°. а) $\frac{x(a+b)^2}{y(a+b)}$; б) $\frac{(a-x)^2c}{(a-x)^2m}$; в) $\frac{4x(x-y)}{7y(x-y)^2}$.

44. а) $\frac{2a(x+3)}{a^2(x+3)}$; б) $\frac{m^2(m-n)^2}{n^2(m-n)^2}$; в) $\frac{6a(2-x)}{3a^2(2-x)}$.

45. а) $\frac{a(b-x)}{xb-x^2}$; б) $\frac{a(4a-3)}{4a^2-3a}$; в) $\frac{x^2(5x-1)}{5xy^2-y^2}$.

46°. а) $\frac{xc-mc}{ax-am}$; б) $\frac{ax^2-x^3}{ax-x^2}$; в) $\frac{2x-x^4}{2y-x^3y}$.

47. а) $\frac{2c^2-4c}{2a-ac}$; б) $\frac{b-a}{(a-b)^2}$; в) $\frac{m^4-m}{1-m^3}$.

48. Сократив дробь, ученик вытер на классной доске часть записей (рис. 25). Возобновите эти записи.

$\frac{120(a-b)x}{4(a-} = \frac{30}{-b)x}$

Рис.25

49. Выполните деление :

а) $24p^2x : 48px^2$; б) $-3ax : 12a^2x^3$;

в) $(a^2c + bc) : (xa^2 + xb)$; г) $(c^n - n^3) : (n - c)$.

50. Найдите значение дроби:

а) $\frac{6a^4c^2}{3a^2c^4}$ при $a = 8$, $c = 16$;

б) $\frac{a^2 + 2ax + x^2}{2a + 2x}$ при $a = 2{,}37$, $x = -0{,}37$.

51. Представьте дробь $\frac{3}{2x}$ со знаменателем: а) $4x^3$;

б) $6x(x-1)$.

Р е ш е н и е. а) Чтобы получить знаменатель $4x^3$, нужно $2x$ умножить на $2x^2$. Следовательно, $\frac{3}{2x} = \frac{3 \cdot 2x^2}{2x \cdot 2x^2} = \frac{6x^2}{4x^3}$.

б) Чтобы получить знаменатель $6x(x-1)$, нужно $2x$ умножить на $3(x-1)$. Следовательно,

$$\frac{3}{2x} = \frac{3 \cdot 3(x-1)}{2x \cdot 3(x-1)} = \frac{9(x-1)}{6x(x-1)}.$$

52. Приведите к общему знаменателю дроби:

а) $\frac{2}{x}$ и $\frac{1}{a}$;

б) $\frac{a}{2m}$ и $\frac{b}{3m^2}$;

в) $\frac{2}{c}$ и $\frac{1}{a-b}$;

г) $\frac{8}{x}$ и $\frac{7}{x(x-a)}$;

д) $\frac{1}{x-a}$ и $\frac{1}{x+a}$;

е) $\frac{1}{(a+b)^2}$ и $\frac{2a}{a-b}$.

53. Докажите тождество:

а) $\frac{4ab}{(a+b)^2-(a-b)^2}=1$;

б) $\frac{a^2+b^2}{(a+b)^2+(a-b)^2}=\frac{1}{2}$.

54*. Упростите выражение:

а) $\frac{3x+2+3xy+2y}{2y-2+3xy-3x}$;

б) $\frac{6a^2+15ab-8ac-20bc}{12a^2-9ab-16ac+12bc}$;

в) $\frac{(x+2)(x-1)}{x^3+3x+2}$;

г) $\frac{2a^2-18}{a^2+2a-15}$.

§ 30. Сложение и вычитание дробей

Вы уже знаете, что для натуральных чисел a, b, c имеет место равенство

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}.$$

Верно оно и для произвольных рациональных значений a, b, c, кроме $c=0$. Докажем это.

Пусть a, b и $c\neq 0$ — какие-нибудь рациональные числа. Тогда $\frac{a}{c}$ и $\frac{b}{c}$ — также рациональные числа. Если $\frac{a}{c}=r$ и $\frac{b}{c}=p$, то по определению деления $a=cr$ и $b=cp$. Сложив левые и правые части этих равенств, получим $a+b=c(r+p)$. По определению деления из полученного равенства следует, что

$$r+p=\frac{a+b}{c},\ \text{т. е.}\ \frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}.$$

А это и требовалось доказать.

Аналогично можно доказать и тождество

$$\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}.$$

Из этих двух тождеств следуют правила сложения и вычитания дробей с одинаковыми знаменателями.

Чтобы сложить дроби с одинаковыми знаменателями, нужно сложить их числители, а знаменатель оставить тот же. Чтобы найти разность дробей с одинаковыми знаменателями, нужно из числителя уменьшаемого вычесть числитель вычитаемого, а знаменатель оставить тот же.

Примеры.

$$\frac{5ax}{3m}+\frac{2c}{3m}=\frac{5ax+2c}{3m};$$

$$\frac{a}{m+x}-\frac{m}{m+x}=\frac{a-m}{m+x}.$$

Если нужно найти сумму или разность дробей с разными знаменателями, то сначала их приводят к общему знаменателю, подобно тому, как это делают при сложении и вычитании обыкновенных дробей.

Примеры.

$$\frac{1}{2a}+\frac{3a}{5x}=\frac{5x}{10ax}+\frac{6a^2}{10ax}=\frac{5x+6a^2}{10ax};$$

$$\frac{1}{x+y}-\frac{1}{x}=\frac{x}{(x+y)x}-\frac{x+y}{(x+y)x}=\frac{x-x-y}{(x+y)x}=-\frac{y}{(x+y)x}.$$

Иногда возникает необходимость найти сумму или разность дроби и целого выражения. Их можно складывать и вычитать как дроби, записав целое выражение в виде дроби со знаменателем 1.

Примеры.

$$\frac{2xy}{3c}+5c=\frac{2xy}{3c}+\frac{5c}{1}=\frac{2xy+15c^2}{3c};$$

$$a-\frac{1}{a+x}=\frac{a}{1}-\frac{1}{a+x}=\frac{a^2+ax-1}{a+x}.$$

Подобным способом упрощают выражения, состоящие из трех и более дробей, соединенных знаками плюс или минус.

Пример.

$$\frac{2c}{3x}+\frac{1}{a}-\frac{3a}{2x}=\frac{4ac}{6ax}+\frac{6x}{6ax}-\frac{9a^2}{6ax}=\frac{4ac+6x-9a^2}{6ax}.$$

55. Сложите дроби:

а) $\frac{2}{5}$ и $\frac{4}{5}$; б) $\frac{7}{13}$ и $\frac{6}{13}$; в) $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{4}$ и $\frac{5}{4}$;

г) $\frac{0,6}{2,3}$ и $\frac{4}{2,3}$; д) $\frac{3}{-5}$ и $\frac{4}{-5}$; е) $\frac{5,3}{0,2}$, $\frac{2,3}{0,2}$ и $\frac{0,4}{0,2}$;

ё) $\frac{a}{2x}$ и $\frac{3}{2x}$; ж) $\frac{2c^2}{3ab}$ и $\frac{1-c^2}{3ab}$; з) $\frac{2x}{x+2}$, $\frac{6}{x+2}$ и $\frac{x}{x+2}$.

Представьте в виде дроби выражения 56—63.

56. а) $\frac{x}{3a}+\frac{y}{3a}$; б) $\frac{1}{-5x}+\frac{a}{-5x}$; в) $\frac{1}{4m}+\frac{3}{4m}+\frac{5}{4m}$.

57. а) $\frac{1}{9a}-\frac{c}{9a}$; б) $\frac{x+y}{2m}-\frac{x}{2m}$; в) $\frac{x+3}{0,5c}-\frac{9}{0,5c}$.

58°. а) $\frac{a}{x}+\frac{b}{x}-\frac{c}{x}$; б) $\frac{2}{3a^2}-\frac{x}{3a^2}+\frac{y}{3a^2}$.

59. а) $\frac{a}{a+x}+\frac{2x}{a+x}-\frac{x}{a+x}$; б) $\frac{2c}{c-x}-\frac{c}{c-x}-\frac{x}{c-x}$.

60°. а) $\frac{m+c}{2x}+\frac{m-c}{2x}$; б) $\frac{x}{0,5a}-\frac{2x-c}{0,5a}$.

61. $\frac{2x^2+7xy-9y^2}{x^2-y^2}+\frac{11x^2-7xy-2y^2}{x^2-y^2}$.

62. $\frac{x+2y}{2x-y}+\frac{2x-2y}{2x-y}+\frac{6x-8y}{2x-y}-\frac{x-2y}{2x-y}$.

63. $\frac{5x^2+20xy+10y^2}{3x-15y}+\frac{6x^2-30xy}{3x-15y}-\frac{10x^2-xy+10y^2}{3x-15y}$.

64. Докажите тождество:

а) $\frac{4a}{a-5}-\frac{20}{a-5}=4$; б) $\frac{x^2}{x^2+1}+\frac{2x^2}{x^2+1}+\frac{3}{x^2+1}=3$.

65. Докажите, что значение выражения

$$\frac{a^2}{a^2+1}-\frac{2a}{a^2+1}+\frac{1}{a^2+1}$$

не может быть отрицательным числом.

Приведите к общему знаменателю выражения 66—70.

66. а) $\frac{1}{a}$ и $\frac{3}{2a}$; б) $\frac{x}{a+x}$ и $\frac{m}{3(a+x)}$; в) $\frac{1}{3c}$ и $\frac{5}{7c}$.

67. а) $\frac{1}{3a^2x}$ и $\frac{1}{5ax^3}$; б) $\frac{c}{5b^3z}$ и $\frac{c^2}{2az^3}$; в) $\frac{4}{3ab^4z}$ и $\frac{5}{4a^2bz^3}$.

68. а) $\frac{1}{a-x}$ и $\frac{1}{(a-x)^2}$; б) $\frac{m}{a-c}$ и $\frac{n}{a^2-c^2}$.

69. а) $\frac{4ax}{a+x}$ и $\frac{5x}{x^2-a^2}$; б) $\frac{3x}{x-1}$ и $\frac{1}{(1-x)^2}$.

70. а) $\frac{1}{a}$, $\frac{2}{a-c}$ и $\frac{3}{x(a-c)}$; б) $\frac{a}{x}$, $\frac{2}{a-x}$ и $\frac{a}{(a-x)^2}$.

71. Сложите дроби:

а) $\frac{1}{x}$ и $\frac{3}{2x}$; б) $\frac{a}{c}$ и $\frac{3-c}{4c}$;

в) $\frac{a+x}{2x}$ и $\frac{x-a}{3x}$; г) $\frac{1}{a+b}$ и $\frac{3}{x(a+b)}$;

д) $\frac{a-c}{c}$ и $\frac{a}{c(a-c)}$; е) $\frac{1}{2a^2bx^3}$ и $\frac{5}{3ax^4}$.

72. Найдите разность дробей:

а) $\frac{4a}{ax^2}$ и $\frac{5}{ax}$; б) $\frac{1}{c}$ и $\frac{1}{a-c}$; в) $\frac{x^2-m}{x(x+m)}$ и $\frac{x}{m}$.

Представьте в виде дроби выражения 73—94.

73. а) $\frac{1}{3a}+\frac{1}{9a}$; б) $\frac{c}{x}+\frac{5}{2x}$; в) $\frac{1}{5c}+\frac{4}{c}$.

74. а) $\frac{1}{m}-\frac{5}{4m}$; б) $\frac{a}{2x}-\frac{4a}{x}$; в) $\frac{1}{0{,}5c}-\frac{2}{c}$.

75. а) $\frac{1}{3ax^2}+\frac{2}{5az^2}$; б) $\frac{4m}{3p^2x}-\frac{1}{5m^2x}$; в) $\frac{4}{a}-\frac{3}{2ac^2x}$.

76. а) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}$; б) $\frac{a}{xy}+\frac{b}{xz}-\frac{c}{yz}$;

в) $\frac{5}{x^2yz}-\frac{2}{xy^2z}+\frac{3}{xyz^2}$.

77. а) $\frac{2a-x}{5}-\frac{x+a}{7}$; б) $\frac{a}{8}-\frac{a(1-x)}{12}$;

в) $\frac{1}{4}+\frac{3}{2a}-\frac{a}{6x}$.

78. $\frac{2a-3b+4}{6}+\frac{3a-4b+9}{8}+\frac{a-1}{12}$.

79. $\frac{4x-5y+8}{18}+\frac{7x+3y-5}{30}+\frac{2x-5y-3}{45}$.

80. $\frac{2a+3b}{4}-\frac{a+2b}{6}+\frac{4a-b}{8}-\frac{3a-4b}{12}$.

81. $\frac{3(2a-3b)}{8}-\frac{2(3a-5b)}{3}+\frac{5(a-b)}{6}$.

82. $\frac{x-4}{2x}-\frac{5x-7}{10x}-\frac{3x+9}{4x}+\frac{2x+5}{5x}$.

83. $\frac{2a-ab+3b}{9ab}-\frac{a-2ab}{ab}-\frac{4a+ab-5b}{6ab}$.

84. а) $\frac{6}{4x-5y}-\frac{3}{2x}$; б) $\frac{3}{4}-\frac{x+2}{4-3x}$;

в) $\frac{7+2x}{5-3x}+\frac{2}{3}$.

85. а) $\frac{1}{a-b}+\frac{1}{a+b}$; б) $\frac{a}{x+b}-\frac{a}{x-b}$;

в) $\frac{4}{a-5}-\frac{3}{5+a}$.

86. а) $\frac{4x}{2+x}-\frac{x}{x-2}$; б) $\frac{2a}{a-3}+\frac{a}{a+3}$;

в) $\frac{5a}{4x-3}-\frac{6a}{3x-4}$.

87. а) $\frac{x+4}{3+x}-\frac{5-x}{x-3}$; б) $\frac{c-2}{c-4}+\frac{c+4}{c-2}$;

в) $\frac{4-5x}{3x-2}-\frac{5-6x}{2+3x}$.

88. а) $\frac{a+b}{c}+1$; б) $m+\frac{3c-m^2}{m-c}$; в) $5-\frac{3x^2}{a-x^2}$.

89. а) $\frac{x+1}{x-1}-1$; б) $\frac{n^2}{x^2}+\frac{n}{x}-n$; в) $a+x-\frac{ax}{a-x}$.

90. а) $\frac{3a-4b}{4ab-2b^2}+\frac{8a-3b}{8a^2-4ab}$;

б) $\frac{x-1}{2x+2}-\frac{3x-4}{3x+3}+\frac{2x-1}{6x+6}$.

91. а) $\frac{5}{a-1}-\frac{8}{1+a}+\frac{3a+7}{a^2-1}$; б) $\frac{1}{x}+\frac{x+1}{x^2-x}-\frac{x-1}{x^2+x}$.

92. а) $\frac{2}{x+1}+\frac{5}{x-1}-\frac{5}{x+2}$;

б) $\frac{2}{2a-1}-\frac{9}{3a-1}+\frac{4}{2a-3}$.

93. а) $\frac{2}{(x-1)^3}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2}{x-1}$;

б) $\frac{2}{(a+1)^3}+\frac{1}{(a+1)^2}-\frac{2}{1-a}$.

94. а) $\frac{2x-3}{3x-3}-\frac{3x-1}{4x+4}-\frac{x+2}{x^2-1}$;

б) $\frac{7}{a+b}+\frac{3a^2-2b^2}{a^2-b^2}-3-\frac{5}{a-b}$.

95. Решите уравнение:

а) $\frac{x}{4}+\frac{2x-6}{5}=4$; б) $\frac{y-3}{8}-\frac{5(y-2)}{7}=4$.

96. Докажите тождество:

а) $\frac{m}{m+n}+\frac{2mn}{m^2-n^2}-\frac{n}{m-n}=1$;

б) $\frac{x^3}{x^2-4}-\frac{x}{x-2}-\frac{2}{x+2}=x-1$.

97. Докажите, что значение выражения

$$\frac{7x^2+4}{3x^2+3}-\frac{5x^2+3}{2x^2+2}$$

не зависит от значения x.

98. Докажите, что при любом допустимом значении a значение выражения $\frac{a^3+3a}{a+2}-\frac{3a^2-14a+16}{a^2-4}+2a$ — положительное число.

99. Докажите тождество:

а) $\frac{a^2-x^2}{a-x}=a+x$; б) $\frac{a^3-x^3}{a-x}=a^2+ax+x^2$;

в) $\frac{a^4-x^4}{a-x}=a^3+a^2x+ax^2+x^3$;

г) $\frac{a^5-x^5}{a-x}=a^4+a^3x+a^2x^2+ax^3+x^4$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Вариант 1

1. Сократите дробь:

а) $\frac{8x^2c}{12axc^3}$; б) $\frac{15^2-60}{20a+40}$.

2. Найдите сумму и разность дробей:

а) $\frac{ac^2}{12x}$ и $\frac{5ac^2}{12x}$; б) $\frac{x-1}{x(x-4)}$ и $\frac{1}{4-x}$.

3. Упростите выражение:

а) $\frac{5xa}{x-a}-\frac{5a^2}{x-a}$; б) $\frac{n}{n+3}+\frac{4n}{9-n^2}+\frac{12}{n^2-9}$.

Вариант 2

1. Сократите дробь:

а) $\frac{16ax^2}{24amx^3}$; б) $\frac{6n^2-24}{12n-24}$.

2. Найдите сумму и разность дробей:

а) $\frac{n^2x}{12c}$ и $\frac{7n^2x}{12c}$; б) $\frac{a-1}{a(a-5)}$ и $\frac{1}{5-a}$.

3. Упростите выражение:

а) $\frac{3ac}{a-c}-\frac{3c^2}{a-c}$; б) $\frac{3a}{9-a^2}+\frac{a}{a+3}+\frac{9}{a^2-9}$.

Вариант 3

1. Сократите дробь:

а) $\frac{20cx^3}{24cnx^2}$; б) $\frac{12x^2-48}{10x+20}$.

2. Найдите сумму и разность дробей:

а) $\frac{ax^2}{10m}$ и $\frac{3ax^2}{10m}$; б) $\frac{n+1}{n(n-5)}$ и $\frac{1}{5-n}$.

3. Упростите выражение:

а) $\frac{7xc}{x-7}-\frac{49c}{x-7}$; б) $\frac{6}{x^2-9}+\frac{x}{x+3}+\frac{2x}{9-x^2}$.

Вариант 4

1. Сократите дробь:

а) $\frac{92ax^3}{24acx^8}$; б) $\frac{8c^2-32}{15c-30}$.

2. Найдите сумму и разность дробей:

а) $\frac{cx^3}{14n}$ и $\frac{5cx^8}{14n}$; б) $\frac{c-2}{c(c-3)}$ и $\frac{1}{3-c}$.

3. Упростите выражение:

а) $\frac{4ma}{m-a}-\frac{4a^2}{m-a}$; б) $\frac{2x}{4-x^2}+\frac{x}{2-x}-\frac{4}{x^2-4}$.

§ 31. Умножение дробей

Правило умножения обыкновенных дробей вам уже известно. Для любых натуральных чисел a, b, c и d верно равенство

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

Докажем, что это равенство — тождество, т. е. что оно верно для всех допустимых значений a, b, c, d ($b\neq 0$ и $d\neq 0$).

Пусть $\frac{a}{b}=r$ и $\frac{c}{d}=p$. По определению деления $a=br$ и $c=dp$, откуда $ac=br\cdot dp=bd\cdot rp$. Поскольку $bd\neq 0$, то из равенства $ac=bd\cdot rp$ по определению деления имеем:

$$rp=\frac{ac}{bd},\ \text{или}\ \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

Из доказанного тождества следует правило умножения дробей.

Чтобы умножить дробь на дробь, нужно перемножить отдельно их числители и отдельно знаменатели и первое произведение записать числителем, а второе — знаменателем дроби.

Примеры.

$$\frac{2x}{3n}\cdot\frac{m}{5n}=\frac{2x\cdot m}{3n\cdot 5n}=\frac{2xm}{15n^2},$$

$$\frac{a}{a-b} \cdot \frac{2x}{a+b} = \frac{a \cdot 2x}{(a-b)(a+b)} = \frac{2ax}{a^2-b^2}.$$

Так как целое выражение можно считать дробью со знаменателем 1, то по сформулированному правилу можно перемножать дроби и целые выражения.

Примеры.

$$\frac{2a}{mx} \cdot 3m^2 = \frac{2a}{mx} \cdot \frac{3m^2}{1} = \frac{2a \cdot 3m^2}{mx} = \frac{6am}{x};$$

$$(c^2-1) \cdot \frac{c}{(c+1)^2} = \frac{(c^2-1)c}{(c+1)^2} = \frac{(c-1)(c+1)c}{(c+1)^2} = \frac{(c-1)c}{c+1}.$$

Правило умножения дробей распространяется на произведение трех и более множителей, например:

$$\frac{1}{a-b} \cdot \frac{a}{a+b} \cdot \frac{a^2-b^2}{4a^2} = \frac{a(a-b)(a+b)}{(a-b)(a+b)4a^2} = \frac{1}{4a}.$$

Возвести дробь в n-ю степень значит перемножить n таких дробей:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b} = \frac{aa \cdot \ldots \cdot a}{bb \cdot \ldots \cdot b} = \frac{a^n}{b^n}, \text{ или } \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Таким образом, ***чтобы возвести дробь в степень, нужно возвести в эту степень числитель и знаменатель и первый результат записать числителем, а второй — знаменателем дроби.***

Пример. Возведем дробь $\frac{ax^2}{2c}$ в пятую степень:

$$\left(\frac{ax^2}{2c}\right)^5 = \frac{(ax^2)^5}{(2c)^5} = \frac{a^5x^{10}}{32c^5}.$$

100. Перемножьте дроби:

а) $\frac{2}{3}$ и $\frac{5}{7}$; б) $\frac{2,5}{2}$ и $\frac{0,4}{0,5}$; в) $\frac{3}{-5}$ и $\frac{-3}{4}$;

г) $\frac{x}{a}$ и $\frac{m}{2c}$; д) $\frac{3}{ab}$ и $\frac{0,5}{ax^2}$.

Выполните умножение 101—110.

101. а) $\frac{x}{y} \cdot \frac{z}{t}$; б) $\frac{2a}{b} \cdot \frac{m}{n}$; в) $\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{x}$; г) $\frac{4a}{c} \cdot \frac{x}{3a}$.

102. а) $\frac{3}{2b} \cdot \frac{6b}{c}$; б) $\frac{x^3}{3} \cdot \frac{9}{x^4}$; в) $\frac{m^2}{10} \cdot \frac{5}{m}$; г) $\frac{8a^2}{15} \cdot \frac{25}{12a}$.

103°. а) $\frac{2{,}7}{2x^2} \cdot \frac{20}{9x^3}$; б) $\frac{1}{4a^3} \cdot \frac{-2a}{7c}$; в) $\frac{2ab}{-5c^2} \cdot \frac{5c^2}{4a^2b^3}$.

104. а) $\frac{15n^6}{-8m^2} \cdot \frac{4m^2}{5n}$; б) $\frac{3a^3}{-x^4} \cdot \frac{5x}{4a}$; в) $\frac{1}{2cx} \cdot \frac{-4c^2}{3x^2}$.

105. а) $5 \cdot \frac{7}{15}$; б) $\frac{-4}{9} \cdot 21$; в) $\frac{18}{19} \cdot (-38)$.

106°. а) $2ax^2 \cdot \frac{3a}{x^3}$; б) $-\frac{7a^2m}{8xn} \cdot 4x^2n$; в) $\frac{-1}{2a^2c} \cdot (-3a^4)$.

107. а) $\frac{a+b}{x} \cdot \frac{3x^2}{2(a+b)}$; б) $\frac{1}{x^2-y^2} \cdot \frac{x-y}{4xy}$;

в) $\frac{3}{x^2-y^2} \cdot \frac{(x+y)^2}{3}$.

108. а) $\frac{a^2-ab}{m^3} \cdot \frac{m^2}{a-b}$; б) $\frac{3ax}{ax+ac} \cdot \frac{cx+c^2}{9x}$;

в) $\frac{6m}{a^2-a} \cdot \frac{2a-2}{9m^3}$.

109°. а) $\frac{a-b}{3} \cdot \frac{15}{a^2-b^2}$; б) $\frac{a-x}{4m^2} \cdot \frac{16am}{(a-x)^2}$;

в) $\frac{a^2-c^2}{2ac} \cdot \frac{8}{(a+c)^2}$.

110. а) $\frac{3a-3b}{4a+4c} \cdot \frac{(a+c)^2}{a^2-b^2}$; б) $\frac{3a+9}{(a+3)^2} \cdot \frac{2a-4}{a^2-4}$.

111. Возведите в квадрат дробь:

а) $\frac{5a}{4x}$; б) $\frac{x}{a+x}$; в) $\frac{-m}{2ac^3}$; г) $\frac{3xz}{2a+z}$.

112. Возведите в квадрат, куб и четвертую степень дробь $\frac{2a}{3cx^2}$.

Возведите в степень 113—115.

113. а) $\left(\frac{m}{3n}\right)^2$; б) $\left(\frac{a}{2dx}\right)^3$; в) $\left(\frac{2cx^2}{5a^3n}\right)^3$.

114. а) $\left(-\frac{3c}{a^2}\right)^3$; б) $\left(\frac{-2x}{3abc}\right)^4$; в) $\left(\frac{2ab}{a-b}\right)^3$.

115. а) $\left(\frac{a-x}{a+x}\right)^2$; б) $\left(\frac{2a}{c-3}\right)^0$; в) $\left(\frac{-5x}{y+x^2}\right)^0$.

116. Упростите выражение:

а) $\frac{a^2-2a+1}{a^2-1}\cdot\left(\frac{a+1}{a-1}\right)^2$; б) $\frac{1-4x^2}{4x^2+4x+1}\cdot\frac{3x}{2x-1}$;

в) $\frac{x^3-a^3}{x^2-a^2}\cdot\frac{x+a}{a^2+ax+x^2}$; г) $\left(\frac{2a}{a-x}\right)^3\cdot\frac{a^2-2ax+x^2}{6a^2}$.

117. Выполнив преобразование дробных выражений, ученик вытер часть классной доски (рис. 26). Восстановите вытертые записи.

118. Найдите числовое значение выражения:

а) $\frac{2x+4}{(x-2)^2}\cdot\frac{x^2-4}{(x+2)^2}$ при $x = 3{,}2$;

б) $\left(\frac{m+1}{m}\right)^2\cdot\frac{3m^2}{2m^2+4m+2}$ при $m = 4{,}357$.

119. Докажите тождество:

а) $\frac{a^2-1}{a^3+1}\cdot\left(a+\frac{1}{a-1}\right)=1$;

б) $\left(\frac{a}{ab-b^2}+\frac{b}{a^2-ab}\right)\cdot\frac{a^2b-ab^2}{a^2+b^2}=1$.

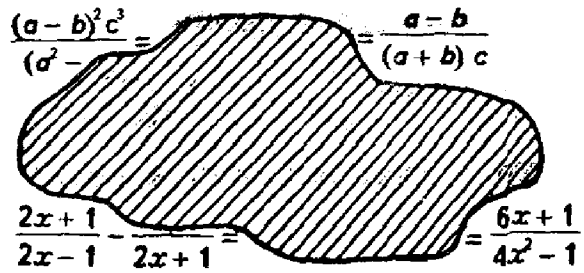


Рис. 26

120. Решите уравнение:

а) $\frac{4x^2-1}{x} \cdot \frac{3x^2}{2x-1} = 0$; б) $\frac{2x+3}{3x} \cdot \frac{2x^2}{4x^2+9} = 0$.

§ 32. Деление дробей

Действие деления обратно умножению.

$$\frac{3}{5} : \frac{4}{7} = \frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 4}, \text{ поскольку } \frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 4} \cdot \frac{4}{7} = \frac{3}{5}.$$

Так же

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}, \text{ т. к. } \frac{ad}{bc} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b}.$$

Выражение $\frac{ad}{bc}$ — произведение дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{d}{c}$. Следовательно,

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}.$$

Дробь $\frac{d}{c}$ называют *обратной* $\frac{c}{d}$. Поэтому делить дроби можно по такому правилу.

Чтобы разделить одну дробь на другую, нужно первую дробь умножить на дробь, обратную второй.

Примеры.

$$\frac{4a^2b}{5x} : \frac{2ax}{3b^2} = \frac{4a^2b}{5x} \cdot \frac{3b^2}{2ax} = \frac{12a^2b^3}{10ax^2} = \frac{6ab^3}{5x^2};$$

$$\frac{1}{a+b} : \frac{a}{a^2-b^2} = \frac{1}{a+b} \cdot \frac{a^2-b^2}{a} = \frac{(a-b)(a+b)}{(a+b)a} = \frac{a-b}{a}.$$

Поскольку целое выражение можно представить в виде дроби со знаменателем 1, то по сформулированному правилу, можно делить дробь на целое выражение и целое выражение на дробь.

Примеры.

$$\frac{4ax^2}{5c} : 2a^2x = \frac{4ax^2}{5c} \cdot \frac{1}{2a^2x} = \frac{2x}{5ac};$$

$$(2a+3) : \frac{a}{2a-3} = \frac{2a+3}{1} \cdot \frac{2a-3}{a} = \frac{4a^2-9}{a}.$$

Выполните деление 121—129.

121. а) $\frac{4}{7} : \frac{2}{21}$; б) $-15 : \frac{5}{7}$; в) $\frac{3,5}{4} : \frac{-7}{16}$.

122°. а) $\frac{2a}{3x} : \frac{4a^2}{9x}$; б) $\frac{18c^2}{5xy} : \frac{9c^3}{15x^2}$; в) $\frac{1,8z^3}{xy^2} : \frac{9z^3}{x^2y}$.

123°. а) $\frac{34ab^2}{17b^2} : \frac{1}{ac^2}$; б) $\frac{3m^2n^3}{4ap} : 9mn^4$; в) $3x^2 : \frac{1}{9x^3}$.

124. а) $-\frac{2ab}{3xy} : \frac{8a^2b^2}{9x^2y^2}$; б) $\frac{x}{5cz} : \left(-\frac{1}{15z^3}\right)$; в) $1 : \frac{2xy}{x^0}$.

125°. а) $\frac{1}{x+y} : \frac{1}{(x+y)^2}$; б) $\frac{(a+b)^2}{3c} : \frac{a+b}{6c}$;

в) $\frac{x}{x+y} : \frac{x+y}{x}$.

126. а) $\frac{a^3+a^2}{11c^2} : \frac{4a+4}{c^8}$; б) $\frac{8cx}{c^2-2c} : \frac{4cx}{3c-6}$;

в) $\frac{mc^2}{m^2-1} : \frac{3c}{m^3-m^2}$.

127. а) $\frac{x^2-3x}{x^2-4} : \frac{x^2-3}{x^2+2x}$; б) $\frac{(a+c)^2}{a-c} : \frac{a^2-c^2}{2a}$;

в) $\frac{ab^3}{6-6a} : \frac{ab^2}{a^2-2a+1}$.

128. а) $(a^2-4c^2) : \frac{a-2c}{3ac}$; б) $(x^6-1) : \frac{1}{x^6+1}$;

в) $\frac{x^2-y^2z^2}{yz+x} : (yz-x)$.

129. а) $(a-4x^2) : (16x^4-a^2)$; б) $(x^2+x+1) : (x^3-1)$.

Упростите выражения 130—133.

130°. а) $\frac{3x}{8a} : \left(\frac{x}{a} \cdot \frac{y}{4c}\right)$; б) $\frac{-5a^2}{4c^3} : \left(\frac{a^3}{2c^3} : \frac{m}{c^2}\right)$;

в) $\left(\frac{2x}{m}\right)^2 : \frac{6x^3}{m^2}$; г) $\frac{-9c^2}{5a} : \left(\frac{3c}{10a^2}\right)^3$.

131. а) $\left(\frac{2a}{3b} \cdot \frac{6ab}{5c^2}\right) : \frac{4ab^2}{9c^2}$; б) $\frac{-3xy}{25ac^3} : \left(\frac{-2cx}{5a} \cdot \frac{3}{-2c^3}\right)$.

132. а) $\left(\frac{2a}{m^2c}\right)^3 : \left(\frac{4a^2}{3mc^2}\right)^2$; б) $\left(\frac{-a}{9c^2x}\right)^3 : \left(\frac{2a}{3cx^2}\right)^4$.

133. а) $\frac{8mn}{9ax^2} : \left(\frac{6m}{5x} : \frac{3x^2}{2n}\right)$; б) $\left(\frac{0{,}5ax}{2m} : \frac{x}{4m^2}\right) : \frac{m}{a}$.

134. Найдите значение выражения:

а) $\frac{(t-2)^2}{t-1} : (t^2-4)$ при $t = 0{,}5$;

б) $(2a-4b) : \frac{3(a^2-4b^2)}{a+2b}$ при $a = 2{,}65$, $b = 7{,}35$.

135. Какие из чисел -2, -1, 0, 1, 2 удовлетворяют уравнению

$$\frac{x-1}{x} : \frac{x}{x+1} = \frac{x^4-1}{5x^2}?$$

136. Решите уравнение:

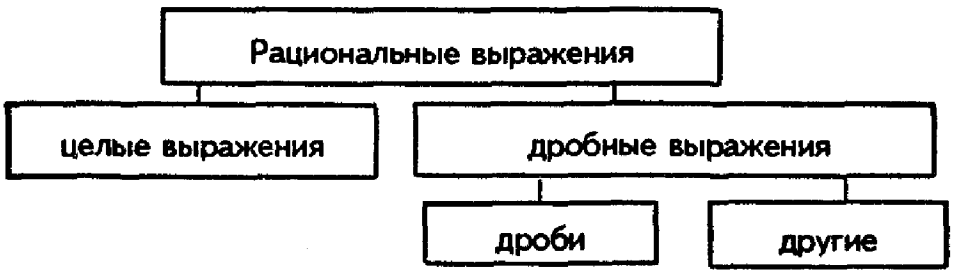
а) $x : \frac{2x}{x-2} = 3$; б) $\frac{3x-2}{2x} : \frac{4}{x} = 2$.

§ 33. Преобразование рациональных выражений

Выражение, составленное из чисел и переменных с помощью действий сложения, вычитания, умножения, деления или возведения в степень, называется *рациональным*. Примеры рациональных выражений:

$$3,\ x,\ a-x^2,\ m+\frac{x-1}{x^2+1},\ \left(\frac{a}{x}+1\right) : \left(\frac{a+x}{2x}-1\right)^2.$$

Целые выражения и дроби — простейшие виды рациональных выражений. Другие виды этих выражений связаны между собой, как показано на схеме.



Словом «другие» здесь обозначены дробные рациональные выражения, не являющиеся дробями, например,

$$a - \frac{a}{1+\frac{1}{a}}, \quad \frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{x+y} - \frac{1}{xy}.$$

Иногда возникает необходимость упростить громоздкое дробное выражение. Это можно делать на основании уже известных нам правил действий с дробями и целыми выражениями. Любое рациональное дробное выражение можно представить в виде дроби, а некоторые — даже в виде целого выражения. Например, первое из приведенных выше выражений можно преобразовывать так: сначала выражение $1+\frac{1}{a}$ представить в виде дроби, затем a разделить на полученную дробь, наконец результат вычесть из a:

$$1)\ 1+\frac{1}{a}=\frac{a+1}{a}; \qquad 2)\ a:\frac{a+1}{a}=\frac{a^2}{a+1};$$

$$3)\ a-\frac{a^2}{a+1}=\frac{a^2+a-a^2}{a+1}=\frac{a}{a+1}.$$

Следовательно, $a-\frac{a}{1+\frac{1}{a}}=\frac{a}{a+1}$.

Подобным способом (частями) можно упростить и второе выражение. А можно преобразовывать его и цепочкой:

$$\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{x+y}-\frac{1}{xy}=\frac{y+x}{xy}:(x+y)-\frac{1}{xy}=\frac{1}{xy}-\frac{1}{xy}=0.$$

Упростите выражения 137—156.

137. а) $\frac{a}{a-1}\cdot(a-1)^2+1$; б) $(x+2)\cdot\frac{1}{x^2-4}+\frac{1}{x}$.

138. а) $\left(\frac{m}{m+1}+1\right):\left(1-\frac{3m^2}{1-m^2}\right)$;

б) $\left(\frac{3a+1}{3a-1}-\frac{3a-1}{3a+1}\right):\frac{12a}{15a-5}$.

139. а) $\left(\frac{2c}{3c+1}+\frac{3c}{1-2c}\right)\cdot\frac{9c^2+6c+1}{10c^2+10c}$;

б) $\left(\frac{a^2}{4b^2}+\frac{9b^2}{a^2}+\frac{3}{2}\right)\cdot\left(\frac{a}{2b}-\frac{3b}{a}\right)$;

в) $\left(1+x+\frac{1}{x}\right)\cdot\left(1+x-\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x^2}$.

140. а) $(a^2-1)\cdot\left(\frac{1}{a-1}-\frac{1}{a+1}-1\right)$;

б) $\left(\frac{a^2}{c^2}+\frac{c}{a}\right):\left(\frac{a}{c^2}-\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)$.

141°. $\left(x+1-\frac{1}{1-x}\right):\left(x-\frac{x^2}{x-1}\right)$.

142. $\left(1-\frac{2x-3y}{2x+3y}\right):\left(\frac{2xy}{4x^2-9y^2}+\frac{y}{3y-2x}\right)$.

143. $\left(n-\frac{1}{1-n}\right)\cdot\frac{n^2-2n+1}{n^2-n+1}$.

144. $\left(\frac{xy}{ab}+\frac{ax}{b^2}-\frac{by}{a^2}\right):\left(\frac{xy}{ab}-\frac{ax}{b^2}+\frac{by}{a^2}\right)$.

145. $\left(\frac{4}{ax}+\frac{2x}{3a^2}-\frac{5a}{6x^2}\right):\left(\frac{3}{x^2}+\frac{1}{2a}-\frac{5a^2}{8x^3}\right)$.

146. $(32a^4-72by^3+9b^3y^2):\left(\frac{2a}{by}-\frac{9y^2}{2a^3}+\frac{9b^2y}{16a^3}\right)$.

147. $\left(\frac{3}{a-1}-\frac{3a^2+6a+3}{a^2-1}:\frac{a^4+a}{a^3+1}\right)\cdot\frac{a+a^2}{-3}$.

148. $\left(\frac{4a}{a+2}-\frac{a^3-8}{a^3+8}:\frac{a^2-4}{4a^2-16a+16}\right)\cdot\frac{a+2}{16}$.

149. $\frac{4ab}{b^2-a^2}:\left(\frac{1}{b^2-a^2}+\frac{1}{a^2+2ab+b^2}\right)$.

150. $\frac{3c-3}{c^2-4}\cdot\frac{c+2}{c^2-2c+1}-\frac{3(c+2)}{c^2-4}$.

151. $\left(\frac{x^2}{x+a}-\frac{x^3}{x^2+2xa+a^2}\right):\left(\frac{x}{x+a}-\frac{x^2}{x^2-a^2}\right)$.

152. $\dfrac{4a^2+16+16a}{a-2}\cdot\left(\dfrac{a}{2a-4}-\dfrac{a^2+4}{2a^2-8}-\dfrac{2}{a^2+2a}\right)$.

153. $\left(\dfrac{2x-1}{x+1}-x\right)\left(\dfrac{3}{x^3+1}-\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{3}{x^2-x+1}\right)$.

154. $\dfrac{3x^2}{a^2-x^2}-3a\left(\dfrac{1}{a-x}-\dfrac{x}{a^3-x^3}\cdot\dfrac{a^2+ax+x^2}{a+x}\right)$.

155. $\dfrac{xy^2-x^3}{x^2+y^2}\cdot\left(\dfrac{x}{(x-y)^2}-\dfrac{y}{x^2-y^2}\right)+\dfrac{y}{x-y}$.

156. а) $\dfrac{\dfrac{1}{a+c}-\dfrac{1}{x}}{a+c-x}\cdot\left(\dfrac{a}{c}-\dfrac{c}{a}\right)$; б) $\dfrac{\dfrac{1}{a+c}-\dfrac{2}{x}}{a+c+\dfrac{x}{2}}:2$.

157. Докажите тождество:

а) $\dfrac{2a-b}{ab}-\dfrac{1}{a+b}\cdot\left(\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}\right)=\dfrac{1}{b}$;

б) $\dfrac{1}{x+y}\cdot\left(\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}\right)+1=\dfrac{x^2+y^2}{xy}$.

158. Упростите выражение:

а) $\dfrac{1}{(a-b)(b-c)}+\dfrac{1}{(c-a)(a-b)}+\dfrac{1}{(b-c)(c-a)}$;

б) $\dfrac{x^2}{(x-y)(x-z)}+\dfrac{y^2}{(y-x)(y-z)}+\dfrac{z^2}{(z-x)(z-y)}$.

159. Докажите, что:

а) если $x=\dfrac{a-b}{a+b}$, то $\left(\dfrac{a}{b}-x\right)\cdot\dfrac{b}{ax+b}=1$;

б) если $x=\dfrac{ab}{a+b}$, то $\dfrac{x^2-a^2}{x^2-b^2}\cdot\dfrac{b^3}{a^3}=\dfrac{a+2b}{b+2a}$;

в) если $x=\dfrac{ab}{a^2+b^2}$, то $\dfrac{0{,}5-x}{0{,}5+x}=\dfrac{(a-b)^2}{(a+b)^2}$.

§ 34. Дробные уравнения

Уметь преобразовывать дробные выражения необходимо для того, чтобы решать дробные уравнения.

Уравнение называется *рациональным*, если его левая и правая части — рациональные выражения. Рацио-

нальное уравнение называется *дробным*, если его правая или левая части — выражения дробные.

Примеры дробных уравнений:

$$\frac{1}{x+5}=3,\quad x-\frac{1-2x}{x}=2,\quad \frac{x+1}{x-2}=\frac{x-3}{x+2}.$$

Один из способов решения дробных уравнений состоит в замене их равносильными уравнениями, у которых левая часть — дробь, а правая — ноль. Например, последнее из приведенных выше уравнений можно преобразовать так:

$$\frac{x+1}{x-2}-\frac{x-3}{x+2}=0,\quad \frac{(x+1)(x+2)-(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+2)}=0,$$

$$\frac{8x-4}{x^2-4}=0.$$

Полученное уравнение равносильно данному. Решая его, принимаем во внимание, что ***дробь равна нулю только тогда, когда числитель равен нулю, а знаменатель отличный от нуля***. Приравняем числитель к нулю: $8x-4=0$, $8x=4$, $x=0{,}5$.

При $x=0{,}5$, знаменатель x^2-4 не равен нулю. Следовательно, $x=0{,}5$ — корень данного уравнения.

Пример. Решите уравнение

$$\frac{2}{x-2}-\frac{x+2}{x+3}=\frac{10}{(x+3)(x-2)}.$$

Решение. $\frac{2}{x-2}-\frac{x+2}{x+3}-\frac{10}{(x+3)(x-2)}=0,$

$$\frac{2(x+3)-(x+2)(x-2)-10}{(x+3)(x-2)}=0,\quad \frac{-x(x-2)}{(x+3)(x-2)}=0.$$

$x(x-2)=0$ при $x=0$ или $x=2$.

При $x=0$ знаменатель $(x+3)(x-2)$ не равен 0. Следовательно, $x=0$ — корень данного уравнения. При $x=2$ $(x+3)(x-2)=0$. Значит, $x=2$ данному уравнению не удовлетворяет.

Ответ. $x=0$.

Решите уравнения 160—172.

160. а) $\frac{x-2}{x}=0$; б) $\frac{3+x}{x}=0$; в) $\frac{x}{x+7}=0$.

161. а) $\frac{x}{x+2}=0$; б) $\frac{x^2}{x-1}=0$; в) $\frac{5x^3}{x^2+9}=0$.

162. а) $\frac{x+3}{x}-2=0$; б) $\frac{2x-1}{3x}=0$;

в) $\frac{x}{x+2}-2=0$.

163°. а) $\frac{x-8}{x}=3$; б) $\frac{5-x}{x}=6$; в) $\frac{x}{x-2}=2$.

164. а) $\frac{3x-4}{x}=2$; б) $\frac{5-2x}{x}=3$; в) $\frac{2x}{x+3}=1$.

165. а) $\frac{5x^2+1}{3x}=2x$; б) $\frac{3x^2-4}{x}=2x$;

в) $\frac{x^2-1}{x}=2x$.

166. а) $\frac{3x^2-4}{x}=3x+1$; б) $\frac{2x^2-3}{2x+1}=x+1$.

167°. а) $\frac{1}{x-1}=\frac{2}{x+1}$; б) $\frac{2}{z-3}=\frac{3}{z-2}$.

168. а) $\frac{y-2}{y-6}=\frac{y}{y-5}$; б) $\frac{c+1}{c-1}=\frac{c-5}{c-3}$.

169*. а) $\frac{2x-5}{x-2}+1=\frac{3x-5}{x-1}$;

б) $\frac{5-4z}{3-2z}+\frac{9z-7}{3z-2}=1$.

170*. а) $\frac{4}{1+x}-\frac{x+1}{x-1}=\frac{x^2-3}{1-x^2}$;

б) $\frac{2z-1}{2z+1}-\frac{2z+1}{2z-1}=\frac{8}{1-4z^2}$.

171*. а) $\frac{x+2}{x-2}-\frac{6}{x+2}=\frac{x^2}{x^2-4}$;

б) $\frac{2}{6p+1}-\frac{8+9p}{36p^2-1}=\frac{3}{1-6p}$.

172*. а) $\frac{2}{(1+x)^2} - \frac{5}{(1-x)^2} = \frac{3}{1-x^2}$;

б) $\frac{1}{(3-2x)^2} - \frac{4}{(3+2x)^2} = \frac{3}{9-4x^2}$.

173. Какое число нужно прибавить к числителю и знаменателю дроби $\frac{11}{17}$, чтобы получить $\frac{3}{4}$?

174. Знаменатель дроби на 2 больше числителя. Если его числитель увеличить в 3 раза, а к знаменателю прибавить 67, то получится $\frac{1}{8}$. Найдите дробь.

175. Числитель дроби на 5 меньше знаменателя. Если к числителю прибавить 11, а из знаменателя вычесть 2, то получится дробь, обратная данной. Найдите данную дробь.

176°. Одно число больше другого на 6, а относятся они, как 9:7. Найдите эти числа.

177°. Веревку длиной 35 м разрезали на две части, длины которых относятся, как 3:2. Найдите их длины.

178. Один брат старше другого на 6 лет. Сколько лет каждому из них, если три года назад их лета относились, как 4:3?

179. Расстояние 160 км легковой автомобиль проходит на 2 ч быстрее, чем автобус. Найдите их скорости, если относятся они, как 2:1.

180. Два трактора, работая одновременно, могут вспахать поле за 6 ч, а отдельно первый — за 10 ч. За сколько часов может вспахать поле второй трактор?

181. Бассейн наполняется двумя трубами за 6 ч, а одной трубой — за 10 ч. За сколько часов может наполниться бассейн, если открыть только вторую трубу?

182. Две землечерпалки, работая вместе, могут углубить дно реки за 12 дней. За сколько дней выполнила бы эту работу каждая землечерпалка отдельно, если известно, что производительность одной из них в 1,5 раза выше производительности другой?

183. С т а р и н н а я з а д а ч а. Один мужчина выпивает бочонок кваса за 14 дней, а с женой — за 10 дней. За сколько дней такой бочонок кваса выпьет жена?

184. Задача-шутка.

Вдвоем с женою Елисей
съедают десять карасей,
а с сыном вместе восемь съест,
жена же с сыном — только шесть.
Так сколько для семейки всей
зажарить надо карасей?

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Вариант 1

1. Упростите выражение:

а) $\frac{9ax^3}{x^2-a^2}\cdot\frac{a+x}{6x^2}$;

б) $\left(n+\frac{1}{2+n}\right):\frac{n+1}{n+2}-n$.

2. Решите уравнение:

а) $\frac{9}{1{,}2x}-\frac{5}{x}=\frac{1}{6}$;

б) $\frac{3}{x-2}=\frac{10}{x}-\frac{7}{x+2}$.

Вариант 2

1. Упростите выражение:

а) $\frac{8cn^2}{c^2-n^2}\cdot\frac{n+c}{4n}$;

б) $\left(\frac{a^2+c^2}{c}-2a\right):\frac{a-c}{2c}-a$.

2. Решите уравнение:

а) $\frac{7}{1{,}5x}+\frac{2}{x}=\frac{10}{21}$;

б) $\frac{1}{x}+\frac{4}{x-3}=\frac{5}{x-2}$.

Вариант 3

1. Упростите выражение:

а) $\frac{6ac^3}{c^2-a^2}\cdot\frac{a+c}{4c^2}$;

б) $\left(1+\frac{a^2}{2a+1}\right):\frac{a+1}{2a+1}-a$.

2. Решите уравнение:

а) $\frac{15}{x}+\frac{17}{2x}=\frac{1}{2}$;

б) $\frac{2z^2-7z+3}{2z-1}=1+z$.

Вариант 4

1. Упростите выражение:

а) $\frac{4xa^3}{a^2-x^2}\cdot\frac{x+a}{6ax}$;

б) $\left(a+2+\frac{1}{a}\right):\frac{1-a^2}{a}-1$.

2. Решите уравнение:

а) $\frac{9}{x}-\frac{63}{2x}=\frac{9}{10}$;

б) $\frac{x+9}{x-1}+\frac{x+1}{x+5}=2$.

Глава VI

КВАДРАТНЫЕ КОРНИ И ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

§ 35. Квадратные корни

Уравнение $x^2 = 9$ имеет два решения: 3 и -3. Говорят, что 3 и -3 — квадратные корни из числа 9.

Квадратным корнем из числа a называют число, квадрат которого равен a.

Примеры. Квадратными корнями из числа:

а) 1600 являются 40 и -40, поскольку $40^2 = 1600$ и $(-40)^2 = 1600$;

б) 0,49 являются 0,7 и $-0,7$, поскольку $0,7^2 = 0,49$ и $(-0,7)^2 = 0,49$.

Квадратный корень из отрицательного числа не существует. Так как нет числа, квадрат которого равнялся бы отрицательному числу.

Квадратный корень из числа 0 равен нулю. Квадратный корень из положительного числа имеет два значения: одно из них положительное, другое — противоположное ему отрицательное число.

Неотрицательное значение квадратного корня называют *арифметическим значением* этого корня. Арифметическое значение квадратного корня из числа a обозначают символом $\sqrt{a}$.

Примеры.

$$\sqrt{9} = 3, \quad \sqrt{1600} = 40, \quad \sqrt{0,49} = 0,7, \quad \sqrt{0} = 0.$$

Примечание. Символом $\sqrt{a}$ обозначают только арифметическое значение квадратного корня из числа a, хотя и читают его короче: «квадратный корень из числа a».

Вычисление арифметического значения квадратного корня называется *извлечением квадратного корня*. Из небольших чисел, являющихся точными квадратами натуральных чисел, извлекать квадратные корни желательно устно.

a	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144
$\sqrt{a}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Квадратные корни из больших натуральных чисел можно находить, пользуясь таблицей квадратов (с. 300). Например, $\sqrt{5329} = 73$, $\sqrt{1000} \approx 32$.

Используя микрокалькулятор, можно извлекать квадратные корни с большей точностью. Например, чтобы извлечь квадратный корень из 1000, набираем это число, после чего нажимаем на клавиш $\boxed{\sqrt{}}$. На экране высветится число 31,622776. Следовательно, $\sqrt{1000} \approx 31{,}622776$.

Если таким способом определить значение $\sqrt{0{,}0035}$, то калькулятор высветит два числа: 5,9160797 и -2. Число -2 здесь показывает, что в первом числе запятую следует перенести *влево* через две цифры. Следовательно,

$$\sqrt{0{,}0035} \approx 0{,}059160797.$$

185. Покажите, что 8 — квадратный корень из числа 64. Существуют ли другие квадратные корни из числа 64?

186. Покажите, что:

а) 5,4 — квадратный корень из числа 29,16;

б) 0,99 — квадратный корень из числа 0,9801.

Найдите отрицательные значения квадратных корней из чисел 29,16 и 0,9801.

187. Является ли число -37 арифметическим значением квадратного корня из числа 1369? А число 37?

Вычислите значения выражений 188 — 203.

188. а) $\sqrt{49}$; б) $\sqrt{81}$; в) $\sqrt{121}$; г) $\sqrt{144}$.

189. а) $\sqrt{169}$; б) $\sqrt{256}$; в) $\sqrt{324}$; г) $\sqrt{361}$.

190°. а) $\sqrt{400}$; б) $\sqrt{900}$; в) $\sqrt{2500}$; г) $\sqrt{3600}$.

191. а) $\sqrt{0{,}04}$; б) $\sqrt{0{,}09}$; в) $\sqrt{0{,}16}$; г) $\sqrt{0{,}64}$.

192. а) $\sqrt{1{,}21}$; б) $\sqrt{1{,}44}$; в) $\sqrt{2{,}89}$; г) $\sqrt{3{,}24}$.

193. а) $\sqrt{0{,}0001}$; б) $\sqrt{0{,}0025}$; в) $\sqrt{0{,}0081}$; г) $\sqrt{0{,}0169}$.

194. а) $\sqrt{10{,}24}$; б) $\sqrt{10{,}89}$; в) $\sqrt{12{,}25}$; г) $\sqrt{98{,}01}$.

195. а) $\sqrt{\frac{1}{4}}$; б) $\sqrt{\frac{9}{16}}$; в) $\sqrt{\frac{4}{25}}$; г) $\sqrt{\frac{25}{49}}$.

196°. а) $2\sqrt{49}$; б) $4\sqrt{64}$; в) $7\sqrt{100}$; г) $5\sqrt{144}$.

197. а) $16 : \sqrt{16}$; б) $25 : \sqrt{25}$; в) $90 : \sqrt{81}$.

198. а) $-5\sqrt{36}$; б) $-4{,}7\sqrt{0}$; в) $0\sqrt{47}$.

199. а) $\frac{2}{3}\sqrt{81}$; б) $\frac{1}{5}\sqrt{225}$; в) $-\frac{3}{4}\sqrt{196}$.

200°. а) $\sqrt{25} + \sqrt{49}$; б) $8 + \sqrt{16}$; в) $\sqrt{36} - 4$.

201. а) $5\sqrt{36} + \sqrt{16}$; б) $\sqrt{49} - 7\sqrt{25}$; в) $3\sqrt{16} - 2\sqrt{36}$.

202. а) $3\sqrt{0{,}01} + \sqrt{0{,}09}$; б) $\sqrt{0{,}04} - 0{,}5\sqrt{1}$; в) $\sqrt{2{,}25} - \frac{1}{7}\sqrt{1{,}96}$.

203. а) $\sqrt{36} \cdot \sqrt{25}$; б) $-\sqrt{0{,}49} \cdot \sqrt{49}$; в) $\sqrt{81} \cdot \sqrt{25} \cdot \sqrt{16}$.

Пользуясь таблицей квадратов, вычислите значения выражений 204—206.

204. а) $\sqrt{520}$; б) $\sqrt{720}$; в) $\sqrt{841}$; г) $\sqrt{961}$.

205. а) $\sqrt{1089}$; б) $\sqrt{2601}$; в) $\sqrt{2916}$; г) $\sqrt{3364}$.

206. а) $-\sqrt{5041}$; б) $-\sqrt{7396}$; в) $-\sqrt{8464}$; г) $-\sqrt{8836}$.

207. Пользуясь таблицей квадратов, найдите приближенное числовое значение выражения:

а) $\sqrt{624}$; б) $\sqrt{840}$; в) $\sqrt{5775}$; г) $-\sqrt{6725}$.

Используя микрокалькулятор, найдите приближенное значение выражений 208—209.

208. а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{3}$; в) $\sqrt{5}$; г) $\sqrt{10}$.

209. а) $\sqrt{37}$; б) $\sqrt{3{,}7}$; в) $\sqrt{30{,}7}$; г) $\sqrt{54{,}76}$.

210. Имеет ли смысл выражение:

а) $\sqrt{48}$; б) $\sqrt{-49}$; в) $-\sqrt{64}$; г) $\sqrt{(-5)^2}$;

д) $\sqrt{(-4)^3}$; е) $\sqrt{8 \cdot (-2)}$; ё) $-\sqrt{-17}$; ж) $\sqrt{(-6) \cdot (-12)}$?

211°. Найдите значения выражения:

а) $\sqrt{2x+3}$ при: $x = 11$; $x = -1$; $x = 83$;

б) $\sqrt{14-m}$ при: $m = 5$; $m = -2$; $m = 14$;

в) $\sqrt{a+2c}$ при: $a = 6$ и $c = 5$; $a = 0$ и $c = 8$.

212. Найдите число, квадратный корень из которого равен 18, −25.

213. Существует ли значение переменной x, при котором:

а) $\sqrt{x} = 4$; б) $\sqrt{x} = 0$; в) $\sqrt{x} = -2$; г) $5 + \sqrt{x} = 0$?

Решите уравнения 214—215.

214. а) $\sqrt{x} = 7$; б) $3 - \sqrt{x} = 0$; в) $2\sqrt{x} = 12$;
г) $5\sqrt{y} = 10$; д) $-3 + \sqrt{y} = 0$; е) $z\sqrt{z} = 0$.

215. а) $\sqrt{x+3} = 5$; б) $\sqrt{11-y} = 7$;
в) $\sqrt{2+x} = -3$; г) $\sqrt{1+x^2} = 1$;
д) $\sqrt{x^2-16} = 0$; е) $\sqrt{x^2+5} = 3$.

§ 36. Действительные числа

Известные вам до сих пор числа — целые и дробные, положительные и отрицательные — составляют множество *рациональных чисел*. Рациональными их называют потому, что каждое из них можно записать в виде частного двух целых чисел, а слово «частное» на латинском языке — ratio.

Попробуем записать рациональные числа $\frac{9}{8}$, $\frac{7}{6}$, $\frac{4}{11}$ в виде десятичных дробей. Для этого поделим их числители на знаменатели.

Таким образом,

$$\frac{9}{8} = 1{,}125,\ \frac{7}{6} = 1{,}1666\ldots,\ \frac{4}{11} = 0{,}363636\ldots\ .$$

В двух последних примерах деление можно продолжать без конца (почему?). Полученные частные — бесконечные десятичные дроби, цифры которых периодически повторяются. Это — *бесконечные периодические десятичные дроби.*

Какую угодно десятичную дробь и даже целое число

можно представить в виде бесконечной периодической десятичной дроби, если приписать к его дробной части множество нулей:

$$1{,}125 = 1{,}125000\ldots,\ 18 = 18{,}000\ldots,$$

$$-3{,}7 = -3{,}7000\ldots .$$

Можно доказать, что ***каждое рациональное число можно представить в виде бесконечной периодической десятичной дроби. И каждая бесконечная периодическая десятичная дробь изображает некоторое рациональное число.***

Существуют ли числа, отличные от рациональных? Существуют. Например, вычисляя значение $\sqrt{2}$, $\sqrt{10}$, π, получают бесконечные непериодические десятичные дроби:

$$\sqrt{2} = 1{,}4142135\ldots,\ \sqrt{10} = 3{,}1622776\ldots,$$

$$\pi = 3{,}1415926\ldots .$$

Эти числа — не рациональные.

Числа, изображаемые бесконечными непериодическими десятичными дробями, называют *иррациональными* (от латинских *ir* — не и *rationalis* — разумно обоснованный, целесообразный).

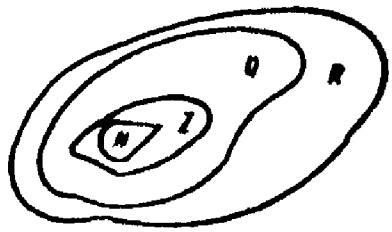


Рис. 27

Иррациональные числа и рациональные образуют *множество действительных чисел.* Множества натуральных (N), целых (Z), рациональных чисел (Q) входят в состав множества действительных чисел (R). Каждое из этих множеств является подмножеством (частью) следующего множества (рис. 27). Каждое натуральное число является одновременно и целым, и рациональным, и действительным. Каждое целое число является также рациональным и действительным. Например, все числа 12, -3, $\frac{2}{7}$, $\sqrt{10}$ — действительные, три первых — рациональные, два первых — целые и только число 12 — натуральное.

Действительные числа, записанные в виде бесконечных десятичных дробей, сравнивают по тому же правилу, что и десятичные дроби. Например, число

3,131313... меньше 4,0111..., и 3,25, и π, но больше 3,1222..., -2, 0.

Действительные числа можно складывать, вычитать, умножать, возводить в степень и делить (на числа, отличные от 0). Для сложения и умножения их остаются верными переместительный, сочетательный и распределительный законы.

Например,

$$\sqrt{2} + \pi = \pi + \sqrt{2}, \quad (3 + \pi) + \sqrt{5} = 3 + (\pi + \sqrt{5}).$$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{2}, \quad (\sqrt{5} \cdot \sqrt{20}) \cdot \sqrt{8} = \sqrt{5} \cdot (\sqrt{20} \cdot \sqrt{8}),$$

$$\pi \cdot (1{,}020202\ldots + 5{,}12345\ldots) = \pi \cdot 1{,}020202\ldots + \pi \cdot 5{,}12345\ldots .$$

Все правила действий над выражениями с переменными, доказанные раньше для рациональных значений переменных, остаются верными и для произвольных действительных значений этих переменных.

Решая прикладные задачи, иррациональные числа обычно округляют, отбрасывая их бесконечные «хвосты десятичных знаков». Например, если нужно найти значение суммы чисел π и $\sqrt{2}$ с точностью до тысячных, пишут:

$$\pi + \sqrt{2} \approx 3{,}1416 + 1{,}4142 \approx 4{,}556.$$

216. Какие из чисел 7, 84, 0, $\frac{2}{9}$, 0,5, -8, $2\frac{1}{3}$, $-24{,}9$ натуральные; какие — целые; какие — рациональные?

217. Какие из чисел 13, $\frac{4}{7}$, -4, 7,9, 0,333... рациональные; какие — иррациональные; какие — действительные?

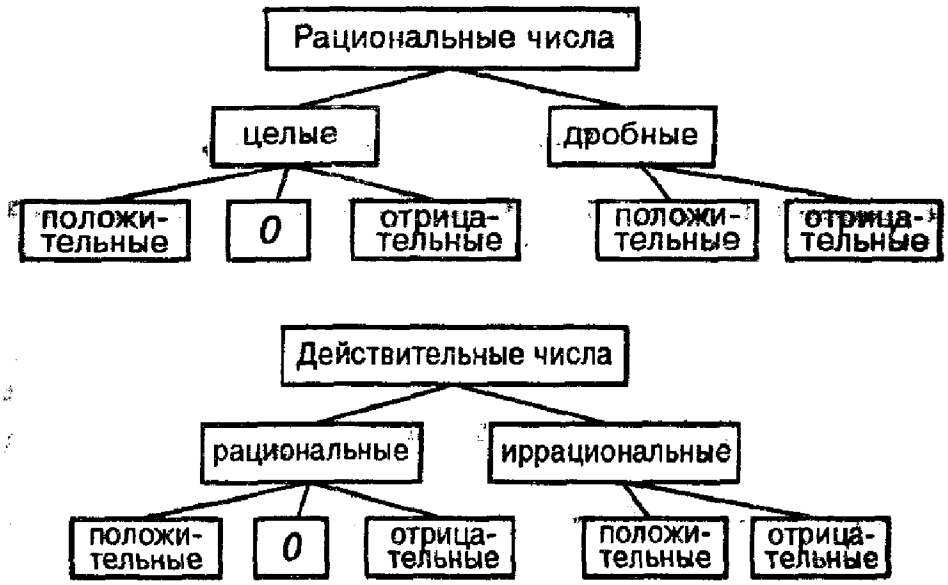
218. Имеются ли среди чисел $\sqrt{5}$, $-\sqrt{16}$, $\sqrt{0{,}004}$, 0,666666 рациональные?

219. Рациональное или иррациональное число 2,001001001..., если группа его цифр 001 бесконечно повторяется?

220. Рациональное или иррациональное число 2,010010001..., если после каждой его единицы на один нуль больше, чем перед ней?

221. Верно ли, что: а) любое натуральное число является целым; б) любое действительное число является иррациональным?

222. Верны ли схемы?



223. Верно ли, что:

а) $10 \in N$; б) $11 \in Z$; в) $12 \in Q$; г) $13 \in R$?

224. Какие из записей верны:

а) $10{,}5 \in N$; б) $10{,}6 \in Z$; в) $10{,}7 \in Q$; г) $10{,}8 \in R$;

д) $\sqrt{3} \in N$; е) $\sqrt{4} \in Z$; ё) $\sqrt{5} \in Q$; ж) $\sqrt{6} \in R$?

225°. Представьте в виде обыкновенной дроби:

а) 0,7; б) 0,53; в) 3; г) 1,25.

226°. Представьте в виде десятичной дроби:

а) $\frac{9}{4}$; б) $\frac{2}{5}$; в) $\frac{13}{25}$; г) $\frac{17}{16}$; д) $\frac{1}{125}$.

227. Представьте в виде бесконечной десятичной дроби:

а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{5}{6}$; в) $\frac{16}{15}$; г) $\frac{89}{12}$; д) $\frac{1}{7}$.

228. Какое из чисел больше:

а) 0,3754 или 1,2; б) 2,0379 или 2,0401;

в) 2,333... или 2,327; г) 13,777... или 12,888...?

Сравните числа 229—233.

229. а) $\frac{5}{6}$ и $\frac{6}{7}$; б) $\frac{8}{3}$ и $\frac{9}{4}$; в) $-\frac{3}{8}$ и $\frac{4}{9}$.

230°. а) $\frac{2}{3}$ и 0,66; б) $\frac{2}{3}$ и 0,67; в) $\frac{2}{3}$ и 0,666... .

231. а) $-\frac{3}{4}$ и $-1{,}33$; б) $-\frac{4}{3}$ и $-1{,}34$;

в) $-\frac{4}{3}$ и $-1{,}333...$.

Р е ш е н и е. а) Разделив числитель данной дроби $\frac{4}{3}$ на знаменатель, получим 1,333... . Число 1,333... больше 1,33. Поэтому $-1{,}333... < -1{,}33$, или $-\frac{4}{3} < -1{,}33$;

б) $1{,}333... < 1{,}34$. Следовательно, $-\frac{4}{3} > -1{,}34$;

в) $\frac{4}{3} = 1{,}333...$, следовательно, $-\frac{4}{3} = -1{,}333...$.

232. а) $\sqrt{2}$ и 1,41; б) $\sqrt{2}$ и 1,42;

в) $\sqrt{2}$ и 1,414141... .

233. а) π и 3,14; б) π и $\frac{27}{7}$; в) π и $\sqrt{10}$.

234. Вычислите с точностью до тысячных:

а) $0{,}5 + \sqrt{2}$; б) $\frac{1}{3} + \sqrt{10}$; в) $\pi + \sqrt{2}$;

г) $\sqrt{10} - 0{,}4$; д) $\pi - \sqrt{10}$; е) $\sqrt{2} \cdot \pi$;

ё) $\sqrt{10} \cdot \sqrt{2}$; ж) $1 : \pi$; з) $\pi : \sqrt{10}$.

235. Используя микрокалькулятор, вычислите:

а) $3\sqrt{20}$; б) $\sqrt{37} - 1{,}5$; в) $5{,}74 - \sqrt{74}$;

г) $\sqrt{50} - \sqrt{30}$; д) $2\sqrt{13} + \sqrt{3}$; е) $\pi - \sqrt{37}$.

§ 37. Квадратный корень из произведения, дроби, степени

$\sqrt{a}$ — неотрицательное значение квадратного корня из неотрицательного числа a. Поэтому для любого неотрицательного числа a верно тождество $(\sqrt{a})^2 = a$.

Примеры. $(\sqrt{7})^2 = 7$, $(\sqrt{0{,}3})^2 = 0{,}3$, $(\sqrt{0})^2 = 0$.

Верны и такие тождества:

1. $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ — для неотрицательных значений a и b.

2. $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ — для неотрицательного a и положительного b.

3. $\sqrt{a^{2k}} = a^k$ — для неотрицательного a и натурального k. Докажем эти тождества.

1. Если a и b — какие-нибудь неотрицательные числа, то числа $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{ab}$ и $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ также неотрицательные. Кроме того,

$$(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2 = ab.$$

Следовательно, $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ — неотрицательное число, квадрат которого равен ab, т. е. $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

2. Если $a \geqslant 0$ и $b > 0$, то числа $\sqrt{a}$, $\sqrt{\frac{a}{b}}$, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ — неотрицательные, а $\sqrt{b}$ — положительное. Кроме того,

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2} = \frac{a}{b}.$$

Следовательно, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ — неотрицательное число, квадрат которого равен $\frac{a}{b}$, т. е. $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

3. Если число a — неотрицательное, а k — натуральное, то числа a^k, a^{2k} и $\sqrt{a^{2k}}$ неотрицательные. Кроме того, $(a^k)^2 = a^{2k}$. Следовательно, a^k — неотрицательный квадратный корень из a^{2k}, т. е.

$$\sqrt{a^{2k}} = a^k.$$

Доказанные три теоремы коротко можно сформулировать так.

1. ***Корень из произведения двух неотрицательных чисел равен произведению корней из этих чисел (теорема о корне из произведения).***

2. ***Корень из дроби, числитель которой неотрицательный, а знаменатель положительный, равен корню из числителя, разделенному на корень из знаменателя (теорема о корне из дроби).***

3. *Корень из степени a^{2k}, у которой число a неотрицательное и k натуральное, равен a^k (теорема о корне из степени).*

Примечание. Здесь под «корнем» подразумевается только квадратный арифметический корень.

Теорему о корне из произведения можно распространить на три и больше множителей. Действительно, если числа a, b и c неотрицательные, то

$$\sqrt{abc} = \sqrt{(ab) \cdot c} = \sqrt{ab} \cdot \sqrt{c} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c}.$$

Если в доказанных тождествах поменять местами их левые и правые части, получим:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}, \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

Эти тождества показывают, как можно умножать и делить корни. Например,

$$\sqrt{20} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{20 \cdot 5} = \sqrt{100} = 10, \quad \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{45}{5}} = \sqrt{9} = 3.$$

Из теоремы о корне из степени следует, что $\sqrt{a^2} = a$ при $a \geqslant 0$. При $a < 0$ равенство $\sqrt{a^2} = a$ неверно, поскольку число $\sqrt{a^2}$ неотрицательное. Равенство

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

верно при любом значении a, так как число $|a|$ неотрицательное и его квадрат равен a^2.

Примеры. $\sqrt{7^2} = 7$, $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$.

Вычислите значение выражений 236—243.

236. а) $\sqrt{64 \cdot 100}$; б) $\sqrt{49 \cdot 144}$; в) $\sqrt{25 \cdot 121}$;
г) $\sqrt{36 \cdot 900}$; д) $\sqrt{121 \cdot 64}$; е) $\sqrt{900 \cdot 81}$.

237. а) $\sqrt{0{,}01 \cdot 25}$; б) $\sqrt{0{,}04 \cdot 144}$;
в) $\sqrt{0{,}16 \cdot 49}$; г) $\sqrt{0{,}01 \cdot 0{,}04}$;
д) $\sqrt{0{,}16 \cdot 0{,}09}$; е) $\sqrt{0{,}25 \cdot 0{,}01}$.

238. а) $\sqrt{\frac{16}{25}}$; б) $\sqrt{\frac{9}{144}}$; в) $\sqrt{\frac{121}{144}}$;

г) $\sqrt{2\frac{7}{9}}$; д) $\sqrt{5\frac{1}{16}}$; е) $\sqrt{12\frac{1}{4}}$.

239°. а) $\sqrt{8 \cdot 50}$; б) $\sqrt{40 \cdot 90}$; в) $\sqrt{20 \cdot 450}$;
г) $\sqrt{72 \cdot 72}$; д) $\sqrt{18 \cdot 98}$; е) $\sqrt{2{,}5 \cdot 6{,}4}$.

240°. а) $\sqrt{4 \cdot 9 \cdot 25}$; б) $\sqrt{36 \cdot 225 \cdot 144}$;
в) $\sqrt{144 \cdot 36 \cdot 25 \cdot 9}$.

241. а) $\sqrt{\frac{9}{4} \cdot \frac{25}{49} \cdot \frac{81}{121}}$; б) $\sqrt{\frac{8}{27} \cdot \frac{50}{81} \cdot \frac{49}{3}}$;
в) $\sqrt{\frac{16}{25} \cdot \frac{49}{36} \cdot \frac{64}{81}}$.

242°. а) $\sqrt{50} \cdot \sqrt{8}$; б) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$;
в) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{242}$; г) $\sqrt{11} \cdot \sqrt{99}$;
д) $\sqrt{37} \cdot \sqrt{3700}$; е) $\sqrt{444} \cdot \sqrt{111}$;
ё) $\sqrt{1{,}2} \cdot \sqrt{120}$; ж) $\sqrt{40} \cdot \sqrt{62{,}5}$;
з) $\sqrt{1{,}44} \cdot \sqrt{0{,}49}$.

243. а) $\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\frac{6}{25}}$; б) $\sqrt{\frac{5}{9}} \cdot \sqrt{5}$;
в) $\sqrt{41} \cdot \sqrt{\frac{1}{41}}$; г) $\sqrt{3\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{1\frac{1}{5}}$;
д) $\sqrt{1\frac{4}{9}} \cdot \sqrt{1\frac{9}{13}}$; е) $\sqrt{1\frac{1}{16}} \cdot \sqrt{1\frac{8}{17}}$.

244. Пользуясь таблицей квадратов, вычислите:

а) $\sqrt{202500}$; б) $\sqrt{4840000}$; в) $\sqrt{33{,}64}$;
г) $-\sqrt{152100}$; д) $2\sqrt{230400}$; е) $\frac{1}{2}\sqrt{7290000}$.

245. Используя микрокалькулятор, вычислите:

а) $\sqrt{17} \cdot \sqrt{23}$; б) $\sqrt{85} \cdot \sqrt{3{,}8}$; в) $\sqrt{7{,}4} \cdot \sqrt{8{,}9}$;
г) $\frac{\sqrt{327}}{\sqrt{517}}$; д) $\frac{\sqrt{800}}{\sqrt{327}}$; е) $\sqrt{41} \cdot \frac{\sqrt{53}}{\sqrt{85}}$.

Вычислите значение выражений 246—249.

246°. а) $\sqrt{5^2 - 4^2}$; б) $\sqrt{13^2 - 12^2}$;

в) $\sqrt{3^2+4^2}$; г) $\sqrt{21{,}8^2-18{,}2^2}$;

д) $\sqrt{45{,}8^2-44{,}2^2}$; е) $\sqrt{8{,}2^2-1{,}8^2}$.

247. а) $\sqrt{3^4}$; б) $\sqrt{975^2}$; в) $\sqrt{0{,}2^6}$; г) $\sqrt{1{,}2^4}$.

248. а) $3\sqrt{5^2}$; б) $-\sqrt{4^4}$; в) $4\sqrt{0{,}1^4}$; г) $-8\sqrt{0{,}2^4}$.

249. а) $\sqrt{(-5)^2}$; б) $\sqrt{(-3)^2}$;

в) $-\sqrt{(-7)^2}$; г) $-2\sqrt{(-4)^2}$.

250. Замените выражение тождественно равным ему:

а) $(\sqrt{x})^2$; б) $5\sqrt{a^2}$; в) $b\sqrt{b^2}$; г) $-\sqrt{m^2}$.

251. При каких значениях переменной верно равенство:

а) $\sqrt{x^2}=x$; б) $(\sqrt{a})^2=a$; в) $m\sqrt{m^2}=m^2$?

252. Упростите выражение:

а) $\sqrt{9n^2}$ при $n<0$; б) $x\sqrt{x^2}$ при $x<0$.

253. Найдите значение выражения $\sqrt{b^2-4ac}$:

а) при $a=3$, $b=5$, $c=-2$;

б) при $a=100$, $b=160$, $c=63$.

254. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{c^2}$ при: $c=3$; $c=-6$; $c=-12$;

б) $x\sqrt{x^2}$ при: $x=5$; $x=-5$; $x=-7$.

§ 38. Преобразование выражений с корнями

Выражения, содержащие квадратные корни, можно складывать, вычитать, умножать, возводить в степень и делить (на делитель, отличный от 0).

Примеры.

$2\sqrt{3}+5\sqrt{3}=7\sqrt{3}$; $12\sqrt{6}:3\sqrt{6}=\frac{12\sqrt{6}}{3\sqrt{6}}=4$.

$4\sqrt{5}\cdot 3\sqrt{2}=12\sqrt{10}$; $(3\sqrt{2})^2=3\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2}=18$.

Рассмотрим еще некоторые преобразования выражений с корнями.

Пример.

$$\sqrt{200} = \sqrt{100 \cdot 2} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{2} = 10\sqrt{2}.$$

Такое преобразование называют *вынесением множителя за знак корня.* Здесь за знак корня вынесен множитель 10.

Преобразование, обратное вынесению множителя за знак корня, называют *внесением множителя под знак корня.*

$$0{,}3\sqrt{10} = \sqrt{0{,}09} \cdot \sqrt{10} = \sqrt{0{,}09 \cdot 10} = \sqrt{0{,}9}.$$

В этом примере под знак корня внесен множитель 0,3. Рассмотренные преобразования выполняются на основании теоремы о корне из произведения.

Если знак корня содержится в знаменателе дроби, такую дробь можно заменить тождественной ей дробью, в знаменателе которой нет корней. Достаточно домножить члены дроби на соответственно подобранное выражение. Например,

$$\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2}\ \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2};$$

$$\frac{1}{2 - \sqrt{3}} = \frac{2 + \sqrt{3}}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} = \frac{2 + \sqrt{3}}{2^2 - (\sqrt{3})^2} = 2 + \sqrt{3}.$$

Такие преобразования называют *освобождением дроби от иррациональности в знаменателе.*

Названные выше преобразования можно выполнять и над выражениями с переменными.

Примеры.

$$a\sqrt{2} \cdot x\sqrt{3} = ax\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}ax,$$

$$\sqrt{9a} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{a} = 3\sqrt{a},$$

$$2\sqrt{\frac{x}{2}} = \sqrt{4 \cdot \frac{x}{2}} = \sqrt{2x},$$

$$\frac{x}{a - \sqrt{x}} = \frac{x(a + \sqrt{x})}{(a - \sqrt{x})(a + \sqrt{x})} = \frac{x(a + \sqrt{x})}{a^2 - x}.$$

Примечание. Вынося за знак корня переменную, следует помнить, что равенство $\sqrt{a^2c} = a\sqrt{c}$ верно только при неотрицательных значениях a и c. Если

$a < 0$ и $c \geqslant 0$, то $\sqrt{a^2c} = -a\sqrt{c}$. При любых действительных значениях a и неотрицательных c верно тождество

$$\sqrt{a^2c} = |a|\sqrt{c}.$$

Вынесите множитель из-под знака корня 255 — 257.

255. а) $\sqrt{12}$; б) $\sqrt{18}$; в) $\sqrt{32}$; г) $\sqrt{98}$; д) $\sqrt{500}$.

256. а) $\sqrt{250}$; б) $\sqrt{490}$; в) $\sqrt{5000}$; г) $\sqrt{1600}$; д) $\sqrt{6000}$.

257. а) $\sqrt{242}$; б) $\sqrt{363}$; в) $\sqrt{484}$; г) $\sqrt{605}$; д) $\sqrt{882}$.

Внесите множитель под знак корня 258—260.

258. а) $2\sqrt{3}$; б) $3\sqrt{10}$; в) $12\sqrt{2}$; г) $2\sqrt{21}$; д) $11\sqrt{11}$.

259. а) $0{,}1\sqrt{10}$; б) $0{,}2\sqrt{5}$; в) $1{,}2\sqrt{0{,}1}$; г) $0{,}1\sqrt{0{,}1}$.

260. а) $\frac{1}{2}\sqrt{2}$; б) $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$; в) $\frac{3}{5}\sqrt{\frac{3}{5}}$; г) $1\frac{1}{5}\sqrt{2\frac{1}{2}}$.

Сравните значения выражений 261—263.

261. а) $2\sqrt{3}$ и $\sqrt{15}$; б) $3\sqrt{2}$ и $\sqrt{17}$; в) $\sqrt{26}$ и $3\sqrt{3}$.

262. а) $3\sqrt{5}$ и $5\sqrt{3}$; б) $4\sqrt{10}$ и $10\sqrt{2}$; в) $1{,}5\sqrt{1{,}1}$ и $1{,}3\sqrt{1{,}2}$.

263. а) $\frac{2}{3}\sqrt{27}$ и $7\sqrt{\frac{2}{3}}$; б) $0{,}2\sqrt{150}$ и $\frac{1}{3}\sqrt{54}$.

Выполните действия 264—273.

264°. а) $(\sqrt{12} + \sqrt{75}) \cdot \sqrt{3}$; б) $(\sqrt{18} - \sqrt{50}) \cdot \sqrt{2}$.

265. а) $(4\sqrt{3} - \sqrt{24}) \cdot \sqrt{12}$; б) $(2\sqrt{18} + \sqrt{12}) \cdot \sqrt{8}$.

266. а) $(7\sqrt{3} + 5\sqrt{2}) \cdot \sqrt{6}$; б) $(5\sqrt{12} - 3\sqrt{3}) \cdot 2\sqrt{3}$.

267°. а) $(3 + \sqrt{5})(3 - \sqrt{5})$; б) $(\sqrt{7} - 2)(\sqrt{7} + 2)$.

268. а) $(2 - \sqrt{3})(4 + 2\sqrt{3})$; б) $(6 - 3\sqrt{2})(2 - \sqrt{2})$.

269. а) $(2\sqrt{3} + 1)(2\sqrt{3} - 1)$; б) $(4 + 3\sqrt{7})(3\sqrt{7} - 4)$.

270°. а) $(1 + \sqrt{3})^2$; б) $(3 - \sqrt{5})^2$.

271. а) $(2\sqrt{3} - \sqrt{5})^2$; б) $(3\sqrt{2} + 5\sqrt{3})^2$.

272. а) $(\sqrt{5} - 1)^2 + \sqrt{20}$; б) $(1 + \sqrt{3})^2 - \sqrt{12}$.

273. а) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 - 2\sqrt{6}$; б) $(\sqrt{5} - \sqrt{2})^2 + 2\sqrt{10}$.

274. Вынесите множитель из-под знака корня при $a > 0$:

а) $\sqrt{2a^2}$; б) $\sqrt{12a^2}$; в) $3\sqrt{a^3}$; г) $\sqrt{8a^4}$.

275. Вынесите множитель из-под знака корня при $x < 0$:

а) $\sqrt{2x^2}$; б) $\sqrt{20x^4}$; в) $\frac{x}{2}\sqrt{x^2c}$; г) $\sqrt{x^6m}$.

276. Внесите множитель под знак корня при $c > 0$:

а) $c\sqrt{a}$; б) $c^2\sqrt{a}$; в) $c^3\sqrt{x}$; г) $c^4\sqrt{p}$.

277. Внесите множитель под знак корня при $m < 0$:

а) $m\sqrt{m^2}$; б) $2m\sqrt{\frac{1}{m^2}}$; в) $m^2\sqrt{\frac{3}{m^4}}$; г) $m^3\sqrt{\frac{1}{m^8}}$.

Упростите выражения 278—286.

278. а) $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 4\sqrt{2}$; б) $2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} - \sqrt{2} \cdot \sqrt{12}$.

279. а) $\sqrt{48} - \sqrt{300} + \sqrt{75}$; б) $\sqrt{72} \cdot \sqrt{50} + 2\sqrt{18}$.

280. а) $\sqrt{200} + \sqrt{8} - \sqrt{32}$; б) $3\sqrt{8} + \sqrt{98} - \sqrt{2}$.

281°. а) $2\sqrt{a} + 3\sqrt{a} - 4\sqrt{a}$; б) $x\sqrt{x} + y\sqrt{x} - \sqrt{4x}$.

282. а) $\sqrt{25a} - \sqrt{64a} + \sqrt{9a}$;

б) $9\sqrt{p} - \sqrt{9p} + \sqrt{16p}$.

283. а) $2\sqrt{20x} - \sqrt{5x} - \sqrt{45x}$;

б) $\sqrt{18p} - \sqrt{8p} + \sqrt{81}$.

284°. а) $(\sqrt{a} - 1)(\sqrt{a} + 2)$; б) $(\sqrt{x} + 2)(3 + \sqrt{x})$.

285. а) $\sqrt{a}(\sqrt{a} - 2) + 2\sqrt{a}$; б) $(3 - 2\sqrt{x})\sqrt{x} - 3\sqrt{x}$.

286. а) $(-b + \sqrt{x})(-b - \sqrt{x})$;

б) $(b - \sqrt{b^2 - 4ac})(b + \sqrt{b^2 - 4ac})$.

287°. Разложите на множители выражение:

а) $5 + \sqrt{5}$; б) $a - \sqrt{a}$; в) $x - \sqrt{3x}$;
г) $\sqrt{6} - \sqrt{12}$; д) $\sqrt{3x} + \sqrt{5x}$; е) $ac - 3\sqrt{ac}$.

288. Сократите дробь:

а) $\frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}$; б) $\frac{3 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}}$; в) $\frac{\sqrt{10} - 5}{\sqrt{5}}$;
г) $\frac{a^2 - 2}{a + \sqrt{2}}$; д) $\frac{\sqrt{7} + a}{7 - a^2}$; е) $\frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}$.

289. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\frac{6}{\sqrt{3}}$; б) $\frac{10}{3\sqrt{5}}$; в) $\frac{a}{5 - \sqrt{7}}$; г) $\frac{c}{2 + \sqrt{15}}$;
д) $\frac{1}{\sqrt{x}}$; е) $\frac{a}{a - \sqrt{b}}$; ё) $\frac{2c}{\sqrt{c} - \sqrt{x}}$; ж) $\frac{5}{a\sqrt{x} - \sqrt{y}}$.

290. Найдите сумму, разность, произведение и частное выражений:

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ и } \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Вариант 1

1. Вычислите:

а) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{45}$; б) $\sqrt{562^2 - 462^2}$.

2. Упростите выражение:

а) $(4 - \sqrt{3})(4 + \sqrt{3})$; б) $(1 + \sqrt{5})^2 - \sqrt{20}$;
в) $(2 + \sqrt{9x})(2 - 3\sqrt{x})$; г) $(a + \sqrt{a}) : (\sqrt{a} + 1)$.

Вариант 2

1. Вычислите:

а) $\sqrt{7} \cdot \sqrt{28}$; б) $\sqrt{628^2 - 528^2}$.

2. Упростите выражение:

а) $(6 + \sqrt{5})(6 - \sqrt{5})$; б) $(x - \sqrt{x}) : (\sqrt{x} - 1)$;
в) $(3 - \sqrt{4a})(3 + 2\sqrt{a})$; г) $(3 - \sqrt{2})^2 + \sqrt{72}$.

Вариант 3

1. Вычислите:

а) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{75}$; **б)** $\sqrt{698^2 - 598^2}$.

2. Упростите выражение:

а) $(\sqrt{44} - 6)(\sqrt{44} + 6)$; **б)** $(2 + \sqrt{3})^2 - \sqrt{48}$;

в) $(5 + \sqrt{4x})(5 - 2\sqrt{x})$; **г)** $(n + 2\sqrt{n} + 1) : (\sqrt{n} + 1)$.

Вариант 4

1. Вычислите:

а) $\sqrt{22} \cdot \sqrt{88}$; **б)** $\sqrt{922^2 - 522^2}$.

2. Упростите выражение:

а) $(2\sqrt{3} - 1)(\sqrt{12} + 1)$; **б)** $(2 - \sqrt{5})^2 + \sqrt{80}$;

в) $(4 - \sqrt{9c})(4 + 3\sqrt{c})$; **г)** $(x^2 - 3) : (x - \sqrt{3})$.

Глава VII

КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 39. Неполные квадратные уравнения

Задача. Одно из двух чисел больше другого на 6, а их произведение равно 112. Найдите эти числа.

Р е ш е н и е. Обозначим меньшее из искомых чисел буквой x. Тогда большее число равно $x + 6$. Их произведение 112. Следовательно,

$$x(x + 6) = 112, \text{ или } x^2 + 6x - 112 = 0.$$

Это — уравнение *второй степени с одной переменной*. Такие уравнения называют также *квадратными*.

Квадратным называется уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где x — переменная, a, b, c — данные числа, причем $a \neq 0$.

Числа a, b, c — *коэффициенты квадратного уравнения:* a — первый коэффициент, b — второй, c — свободный член.

Согласно определению, первый коэффициент квадратного уравнения не может равняться нулю. Если хотя бы один из коэффициентов b или c равен нулю, то квадратное уравнение называют *неполным*. Неполные квадратные уравнения бывают трех видов:

1) $ax^2 = 0$; 2) $ax^2 + bx = 0$; 3) $ax^2 + c = 0$.

1. Уравнение вида $ax^2 = 0$ равносильно уравнению $x^2 = 0$ и поэтому всегда имеет только о д и н корень $x = 0$.

2. Уравнение вида $ax^2 + bx = 0$ равносильно уравнению $x(ax + b) = 0$ и всегда имеет д в а корня: $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{b}{a}$.

Пример. Решите уравнение $5x^2 + 4x = 0$.

Р е ш е н и е. Вынесем переменную x за скобки: $x(5x + 4) = 0$.

Следовательно, $x = 0$, или $5x + 4 = 0$, откуда $x = -0{,}8$.

О т в е т. $x_1 = 0$, $x_2 = -0{,}8$.

3. Квадратное уравнение вида $ax^2 + c = 0$ равносильно уравнению $x^2 = -\frac{c}{a}$. Если $-\frac{c}{a} > 0$, оно имеет д в а решения, если $-\frac{c}{a} < 0$ — н и о д н о г о решения.

Пример. Решите уравнение $4x^2 - 3 = 0$.

Р е ш е н и е. Преобразуем данное уравнение: $4x^2 = 3$, $x^2 = \frac{3}{4}$, x — число, квадрат которого равен $\frac{3}{4}$, то есть квадратный корень из числа $\frac{3}{4}$. Квадратных корней из числа $\frac{3}{4}$ имеется два: $\sqrt{\frac{3}{4}}$ и $-\sqrt{\frac{3}{4}}$.

О т в е т. $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Если знаки коэффициентов a и c разные, то число $-\frac{c}{a}$ положительное и уравнение имеет два корня. Если знаки коэффициентов a и c одинаковые, то число $-\frac{c}{a}$ отрицательное и уравнение $ax^2 + c = 0$ не имеет корней.

291. Какое из данных уравнений квадратное:

а) $x^2 = \frac{1}{x} + 3$; б) $2x^2 - 3x = 0$;

в) $-x^2 + 5x + \sqrt{8} = 0$; г) $2x^2 + x^3 = 0$;

д) $5x^2 = 4 - 3x$; е) $2z(z + 5) = 7$?

292. Какое из уравнений является неполным квадратным:

а) $x^2 + 8 = 0$; б) $\sqrt{2}x^2 = 0$; в) $x^2 + 3x = 1$;

г) $x^2 + \frac{2}{x} = 0$; д) $\sqrt{5}x^2 + \pi x = 0$; е) $2x^2 - \sqrt{x} = 0$?

293. Замените данное уравнение равносильным ему квадратным уравнением:

а) $2x\,(x - 3) = 50$; б) $(3 - y)\,y = 5y^2 - 4$;

в) $4z^2 = 2z\,(3z + 5)$; г) $(1 - x)(3x - 2) = 2x + x^2$;

д) $(x - 1)\,(x - 2) = 4x$; е) $3(x + 5) - 8 = -5x(x + 2)$.

Решите уравнения 294—307.

294. а) $3x^2 = 0$; б) $\sqrt{7}y^2 = 0$; в) $-z^2 = 0$.

295°. а) $x^2 - 2x = 0$; б) $3z^2 - 6z = 0$; в) $2c = c^2$.

296. а) $y^2 - 9 = 0$; б) $2x^2 - 8 = 0$; в) $-x^2 + 1 = 0$.

297°. а) $(x - 1)\,x + x = 0$; б) $2y\,(y + 3) = 6y$.

298. а) $(z + 2)\,(z - 2) = 0$; б) $(x + 2)\,(x - 2) = 4$.

299°. а) $2x\,(x + 5) = 7x$; б) $-x\,(2x + 3) = 8x$.

300°. а) $4x^2 - 2x = x\,(x - 2)$;

б) $8 - 6z = 2z\,(z - 3)$.

301. а) $5x^2 + 3x + 7 = 7\,(x + 1)$;

б) $15 - 2y = 8y^2 + 3\,(y + 5)$.

302 а) $-2x^2 + 6 = 3\,(x^2 + x + 2)$;

б) $3\,(x^2 + 5) = 4x^2 + x\,(1 - x)$.

303. а) $2(x^2 - 1) = (x - 1)\,(x + 1)$;

б) $(2x + 3)^2 = (x - 3)\,(x + 3)$.

304. $\frac{4 - x^2}{3} = \frac{3x^2 - 2}{4}$; б) $\frac{2z^2}{5} = \frac{3z^2 + 1}{4}$.

305. а) $\frac{x^2 - 1}{6} = \frac{3}{4}$; б) $\frac{2x^2 + 3}{5} = \frac{4}{7}$.

306 а) $\frac{z + 1}{8} = \frac{1}{z - 1}$; б) $\frac{y - 2}{y} = \frac{-1}{y + 2}$.

307. а) $(2x + 1) : 13 = 3 : (2x - 1)$;

б) $(3x^2 - 4) : 5 = 3 : 20$.

308. а) Найдите сторону квадрата, если его площадь равна 484 м^2.

б) Найдите сторону квадрата, если его площадь равна S.

309. Найдите периметр квадрата, площадь которого равна:

а) 289 см^2; б) 0,81м^2; в) S.

310. Найдите длины катетов прямоугольного равнобедренного треугольника, площадь которого равна 0,72 дм^2.

311. Площадь круга радиуса r находят по формуле $S = \pi r^2$. Найдите радиус круга, площадь которого равна: а) 314 см^2; б) S.

312. Площадь кольца равна 942 см^2, а радиус его внешней окружности 20 см (рис. 28). Найдите радиус его внутренней окружности.

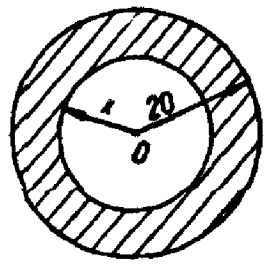


Рис. 28

313. Произведение двух последовательных натуральных чисел на 625 больше меньшего числа. Найдите большее число.

314. Произведение двух последовательных целых чисел в 1,5 раза больше квадрата меньшего из них. Найдите эти числа.

315. Периметр одного квадрата на 8 см меньше периметра другого, а их площади относятся как 1:4. Найдите длины сторон квадратов.

316. Сторона одного квадрата на 3 дм длиннее стороны другого квадрата, а их площади относятся, как 9:4. Найдите их периметры.

317. Используя микрокалькулятор, решите уравнение:

а) $2{,}324x^2 = 74{,}825$; б) $4{,}027y^2 - 12{,}449 = 0$;

в) $4{,}574z^2 = 48{,}226z$; г) $7{,}467x^2 = 15{,}227x$.

§ 40. Формула корней квадратного уравнения

Пример 1. Решите уравнение $x^2 + 6x - 112 = 0$.

Р е ш е н и е. Если к выражению $x^2 + 6x$ прибавить 9, получим квадрат двучлена $x + 3$. Поэтому данное уравнение равносильно уравнению

$$x^2 + 6x + 9 - 9 - 112 = 0, \text{ или } (x + 3)^2 = 121.$$

Следовательно, $x + 3 = 11$, откуда $x = 8$; или $x + 3 = -11$, откуда $x = -14$.

О т в е т. $x_1 = 8$, $x_2 = -14$.

Такой способ решения квадратного уравнения называется *способом выделения квадрата двучлена.*

Пример 2. Решите способом выделения квадрата двучлена уравнение

$$5x^2 - 2x - 3 = 0.$$

Р е ш е н и е. Чтобы первый член уравнения стал квадратом одночлена с целым коэффициентом, умножим обе части данного уравнения на 5:

$$25x^2 - 10x - 15 = 0,$$

$$25x^2 - 2 \cdot 5x + 1 - 1 - 15 = 0, \quad (5x - 1)^2 = 16.$$

Следовательно, $5x - 1 = 4$, откуда $5x = 5$, $x = 1$; или $5x - 1 = -4$, откуда $5x = -3$, $x = -0{,}6$.

О т в е т. $x_1 = 1$, $x_2 = -0{,}6$.

Решим подобным способом уравнение $ax^2 + bx + c = 0$.

Умножим обе части уравнения на $4a$ ($a \neq 0$):

$$4a^2x^2 + 4ax \cdot b + 4ac = 0,$$

$$(2ax)^2 + 2 \cdot 2ax \cdot b + b^2 - b^2 + 4ac = 0,$$

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac.$$

Выражение $b^2 - 4ac$ называют *дискриминантом* (латинское *diskriminans* — различающий) данного квадратного уравнения и обозначают буквой D.

Если $D < 0$, то данное уравнение н е и м е е т

к о р н е й: не существует такого значения x, при котором значение выражения $(2ax + b)^2$ было бы отрицательным.

Если $D = 0$, то $2ax + b = 0$, откуда $x = \frac{b}{2a}$ — е д и н с т в е н н ы й к о р е н ь.

Если $D > 0$, то данное квадратное уравнение равносильно уравнению

$$(2ax + b)^2 = (\sqrt{D})^2,$$

откуда

$$2ax + b = \sqrt{D}, \qquad x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a},$$

или

$$2ax + b = -\sqrt{D}, \qquad x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}.$$

В этом случае данное уравнение имеет д в а к о р н я, отличающихся только знаками перед $\sqrt{D}$. Коротко записывают их так:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \text{ где } D = b^2 - 4ac.$$

Это *формула корней квадратного уравнения* $ax^2 + bx + c = 0$. Пользуясь ею, можно решить любое уравнение.

Примеры. Решите уравнение:

а) $3x^2 - 5x + 2 = 0$; б) $x^2 + 6x + 9 = 0$;

в) $5x^2 - x + 1 = 0$.

Р е ш е н и е. а) $D = 25 - 24 = 1$, $D > 0$,

$$x = \frac{5 + \sqrt{1}}{6} = \frac{5 + 1}{6}$$

О т в е т. $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{2}{3}$

б) $D = 36 - 36 = 0$,

$$x = \frac{-6 \pm 0}{2} = -3.$$

О т в е т. $x = -3$.

в) $D = 1 - 20 = -19$, $D < 0$.

О т в е т. Корней нет.

Способом выделения квадрата двучлена решите уравнения 318—324.

318. а) $x^2 - 6x + 8 = 0$; б) $x^2 - 12x + 35 = 0$.

319. а) $x^2 - 4x - 12 = 0$; б) $z^2 + 4z - 12 = 0$.

320. а) $x^2 - 11x + 18 = 0$; б) $y^2 - 5y - 24 = 0$.

321. а) $m^2 - 12m + 36 = 0$; б) $x^2 + 14x + 49 = 0$.

322. а) $4x^2 + 4x - 15 = 0$; б) $9y^2 + 18y + 8 = 0$.

323. а) $6x^2 - 13x + 6 = 0$; б) $5x^2 + 31x - 28 = 0$.

324. а) $2z^2 = 9z - 10$; б) $8 = 3y + 5y^2$.

325. Найдите дискриминанты квадратных уравнений 318—324.

326. Какое из уравнений не имеет корней:

а) $x^2 + x + 1 = 0$; б) $2y^2 - 3y + 2 = 0$;

в) $0{,}5x^2 + 2x + 2 = 0$; г) $8z^2 - z + 4 = 0$?

Пользуясь формулой корней, решите уравнения 327—362.

327°. а) $2x^2 - 7x - 30 = 0$; б) $4x^2 + 3x - 10 = 0$.

328. а) $9y^2 - 13y + 4 = 0$; б) $5x^2 + 31x - 28 = 0$.

329. а) $16x^2 - 24x + 27 = 0$;

б) $25c^2 + 15c - 4 = 0$.

330. а) $6x^2 - 5x - 6 = 0$; б) $4x^2 - 19x + 12 = 0$.

331. а) $2p^2 - 7p + 6 = 0$; б) $10m^2 - 53m + 15 = 0$.

332. а) $6x^2 - 12{,}5x + 6 = 0$; б) $8x^2 - 8{,}8x + 2{,}1 = 0$.

333. а) $10y^2 - 0{,}8y = 1{,}92$;

б) $4n^2 + 11n + 7{,}36 = 0$.

334. а) $6x^2 - \frac{19x}{6} - 1 = 0$;

б) $6x^2 - 25\frac{1}{2}x + 26\frac{1}{4} = 0$.

335. а) $5x^2 - 7\frac{1}{6}x + 2\frac{1}{2} = 0$; б) $\frac{x^2}{2} - 2\frac{1}{2}x - 7 = 0$.

336. а) $2y^2 + 3\frac{1}{3}y = 18\frac{2}{3}$; б) $\frac{x}{4} + \frac{x}{9} = 1\frac{2}{9}$.

337°. а) $x(x - 6) = 7$; б) $2z(z + 4) = 10$.

338. а) $1{,}5y(3y - 15) = 27$; б) $6n\left(5 - \frac{n}{2}\right) = 48$.

339°. а) $x(7 - x) = 5x - 8$;

б) $2x(3x + 4) = 4x^2 + 5x + 27$.

340. а) $3x(2x - 5) = 2(x^2 + 2)$;

б) $3x(5x + 3) = 2x(6x + 5) + 2$.

341. а) $(x - 5)^2 = 3x + 25$; б) $(x + 4)^2 = 3x^2 - 8$.

342. а) $(p - 3)^2 = 2(p + 1)$; б) $(3c - 5)^2 = 10c + 9$.

343. а) $(2x + 4)^2 = 11x^2 + 1$;

б) $(9 - 4x)^2 = 5(4x + 1)$.

344. а) $x^2 + 1 = 625 - 2x$; б) $y^2 + 4 = 961 + 4y$.

345. а) $(x + 4)(2x - 3) - (5x - 6)(x - 3) = 10$;

б) $(2x - 8)(3x + 1) = (4x - 12)(x - 2) + 8$.

346. а) $(2{,}5x - 7)(2x + 3) + 3x + 4 =$
$= (4x - 9)(1{,}5x + 1)$;

б) $(3z - 5)(4z + 1) + (2z + 3)(5z - 4) =$
$= 6x(3 + 2x) - 11$.

347. а) $(2t - 3)(5t + 2) + (3t - 1)(4t + 2) = 10t^2 - 5$;

б) $(3n - 2)(3n + 2) - (2n - 3)^2 = 3n(n + 7) - 17$.

348. а) $3x + 2 = \frac{8}{x}$; б) $2x = \frac{3x - 4}{x}$.

Р е ш е н и е. а) $3x + 2 - \frac{8}{x} = 0$;

$$\frac{3x^2 + 2x - 8}{x} = 0.$$

Дробь равна нулю, когда числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю.

$$3x^2 + 2x - 8 = 0,$$

$$D = 4 + 4 \cdot 3 \cdot 8 = 100,$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{100}}{6}, \quad x_1 = -2, \quad x_2 = \frac{4}{3}.$$

При этих значениях x знаменатель дроби не равен нулю.

Ответ. $x_1 = -2$, $x_2 = \frac{4}{3}$.

б) $2x - \frac{3x-4}{x} = 0$; $\frac{2x^2 - 3x + 4}{x} = 0$.

$D = 9 - 4 \cdot 2 \cdot 4 = -23$, $D < 0$.

Ответ. Решений нет.

349. а) $x + 3 = \frac{x+3}{x}$; б) $\frac{2c^2}{c-1} = c - 2$.

350. а) $\frac{16}{x+2} = x$; б) $y = \frac{18}{y-5}$.

351°. а) $\frac{z+2}{z} = \frac{5z+1}{z+1}$; б) $\frac{5}{5-m} = \frac{m^2-6m}{m-5}$.

352. а) $\frac{x-5}{x+3} = \frac{3+2x}{2x-1}$; б) $\frac{2x-1}{3-2x} = \frac{x-1}{2x+3}$.

353. а) $\frac{1+3x}{2+x} + \frac{x-1}{2-x} = 1$; б) $\frac{2y-2}{y+3} - \frac{3y-y}{3-y} = 5$.

354. а) $\frac{c-6}{c+5} - 2 = \frac{c-4}{5-c}$; б) $\frac{7}{2x-3} + \frac{5}{x-1} = 12$.

355. а) $\frac{7}{x+2} - \frac{3}{2-x} = \frac{10}{x}$; б) $\frac{5}{z-2} - \frac{4}{z-3} = \frac{1}{z}$.

356. а) $\frac{x}{x-2} + \frac{2}{(x-2)(x-3)} = \frac{2}{x-3}$;

б) $\frac{y}{y-2} + \frac{4}{(y-2)(y-4)} = \frac{2}{y-4}$.

Решение. а) $\frac{x}{x-2} + \frac{2}{(x-2)(x-3)} - \frac{2}{x-3} = 0$,

$\frac{x(x-3) + 2 - 2(x-2)}{(x-2)(x-3)} = 0$, $\frac{x^2 - 5x + 6}{(x-2)(x-3)} = 0$.

Дробь равна нулю, если числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю. $x^2 - 5x + 6 = 0$.

$D = 25 - 4 \cdot 6 = 1$, $x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2}$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

Данному уравнению эти значения не удовлетворяют, поскольку при $x = 2$ знаменатель первой дроби равен 0, а при $x = 3$ знаменатель второй дроби равен нулю.

Ответ. Корней нет.

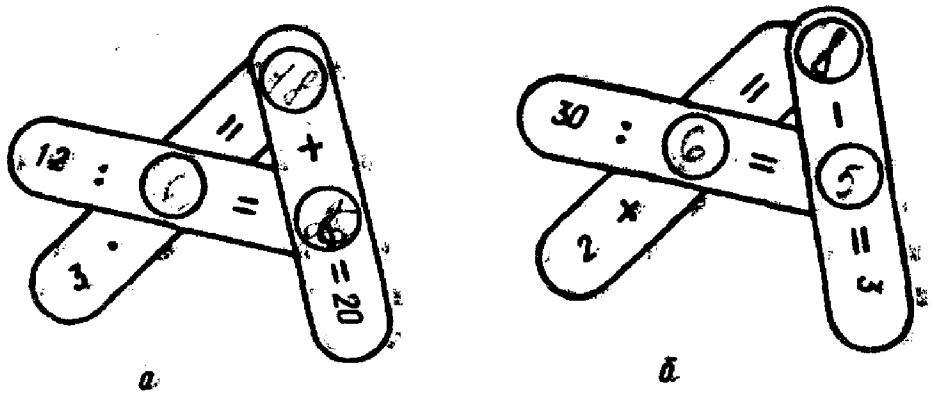


Рис. 29

357. а) $\frac{5x-7}{9}+\frac{14}{2x-3}=x-1$;

б) $\frac{x-4}{12}+\frac{2z-22}{x-6}=\frac{16-x}{4}$.

358. а) $\frac{x}{x-2}+\frac{6}{x^2-7x+10}=\frac{2}{x-5}$;

б) $\frac{2}{x-7}=\frac{x}{x-2}+\frac{10}{(x-2)(x-7)}$.

359. а) $\frac{2z-3}{z-2}-\frac{z+1}{z-1}=\frac{3z+11}{z+1}$;

б) $\frac{3c+1}{c-3}+\frac{2c-1}{c-2}=\frac{5c-14}{c-4}$.

360*. а) $(x+1)^2=7918-2x$;

б) $(x+2)^2=3131-2x$.

361. а) $x^2+2\sqrt{2x}+1=0$; б) $x^2-3\sqrt{2x}+4=0$.

362. а) $\sqrt{2}b^2-3b+\sqrt{2}=0$;

б) $c^2-\sqrt{6}c+2{,}5=0$.

363. Используя калькулятор, решите уравнение:

а) $37{,}2x^2-1{,}28x+14{,}3=0$;

б) $5{,}83x^2-8{,}38x+16{,}8=0$.

364. Решите ребусы, изображенные на рисунке 29.

365. Решите уравнение:

а) $x^4-5x^2+4=0$; б) $x^4-8x^2-9=0$;

в) $x-4\sqrt{x}+3=0$; г) $x-7\sqrt{x}+12=0$.

§ 41. Решение задач составлением квадратных уравнений

С помощью квадратных уравнений можно упростить решение многих задач.

Задача 1. Найдите длины сторон прямоугольника, периметр которого равен 42 см, а площадь 108 см^2.

Р е ш е н и е. Полупериметр прямоугольника равен 21 см. Значит, если одна его сторона имеет x см, то вторая $(21 - x)$ см. Площадь прямоугольника равна произведению этих длин:

$$x\,(21 - x) = 108, \text{ или } x^2 - 21x + 108 = 0.$$

Решим это уравнение. $D = 21^2 - 4 \cdot 108 = 9$,

$$x_{1,2} = \frac{21 \pm \sqrt{9}}{2}, \quad x_1 = 9, \quad x_2 = 12.$$

Если $x = 9$, то $21 - x = 12$, если $x = 12$, то $21 - x = 9$.

О т в е т. 9 см и 12 см.

Задача 2. Собственная скорость моторной лодки 18 км/ч. Расстояние 12 км по течению реки она проходит на 9 мин быстрее, чем против течения. Найдите скорость течения реки.

Р е ш е н и е. 9 мин = 0,15 ч. Если скорость течения реки равна x км/ч, то скорость лодки по течению $(18 + x)$ км/ч, а против течения $(18 - x)$ км/ч. 12 км по течению она проходит за $\frac{12}{18 + x}$ ч, а против течения — за $\frac{12}{18 - x}$ ч. Имеем уравнение

$$\frac{12}{18 - x} - \frac{12}{18 + x} = 0{,}15, \text{ или } \frac{4}{18 - x} - \frac{4}{18 + x} = 0{,}05,$$

откуда

$$4\,(18 + x) - 4\,(18 - x) - 0{,}05\,(18 - x)\,(18 + x) = 0,$$

$$x^2 + 160x - 324 = 0. \quad D = 160^2 + 4 \cdot 324 = 26\,896.$$

$$x_{1,2} = \frac{-160 \pm \sqrt{26896}}{2} = \frac{-160 \pm 164}{2}, \quad x_1 = 2, \; x_2 = -162.$$

Задаче удовлетворяет только положительный корень.

О т в е т. 2 км/ч.

Задача 3. n точек размещены так, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Если каждую из этих точек соединить отрезком со всеми остальными, получится 351 отрезок. Найдите число n.

Р е ш е н и е. С одной точки выходит $(n-1)$ отрезков, со всех n данных точек выходит $n(n-1)$ отрезков. При этом каждый отрезок считается дважды, так как имеет два конца. Следовательно, всего отрезков $\frac{n(n-1)}{2}$.

Имеем уравнение

$$\frac{n(n-1)}{2} = 351, \text{ или } n^2 - n - 702 = 0.$$

Решим это уравнение. $D = 1 + 4 \cdot 702 = 2809$,

$$n_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{2809}}{2} = \frac{1 \pm 53}{2},$$

откуда $n_1 = 27$, $n_2 = -26$. Отрицательный корень задаче не удовлетворяет.

О т в е т. $n = 27$.

366. Найдите два числа, сумма которых равна 61, а произведение 900.

367°. Найдите два числа, разность которых равна 11, а произведение 312.

368. Найдите длину и ширину участка прямоугольной формы, если его площадь равна 800 м^2, а длина на 20 м длиннее ширины (рис. 30).

369. Периметр поля прямоугольной формы равен 6 км, а его площадь 200 га. Найдите длину и ширину поля.

370. Произведение двух последовательных чисел больше их суммы на 239. Найдите эти числа.

371. З а д а ч а Л. М а г н и ц к о г о. Найдите число, зная, что, прибавив к его квадрату 108, получим число в 24 раза больше искомого.

372. Квадрат суммы двух последовательных натуральных чисел больше суммы их квадратов на 264. Найдите числа.

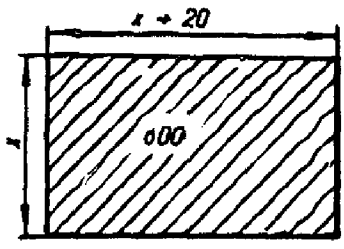


Рис. 30

373. Найдите три последовательных целых числа, сумма квадратов которых равна 434.

374. Найдите обыкновенную дробь, числитель которой на 2 больше знаменателя и на 40 меньше квадрата знаменателя.

375. Знаменатель дроби на 3 больше числителя. Если к этой дроби прибавить обратную ей дробь, получится $\frac{149}{70}$. Найдите дробь.

376°. В кинотеатре было 320 мест. После того как число мест в каждом ряду увеличили на 4 и прибавили еще один ряд, в зале стало 420 мест. Сколько стало рядов в кинотеатре?

377°. Теплоход прошел по течению реки 48 км и столько же против течения, затратив на весь путь 5 ч. Найдите собственную скорость теплохода, если скорость течения реки 4 км/ч.

378°. Лодка прошла против течения 22,5 км и по течению 28,5 км, затратив на весь путь 8 ч. Скорость течения реки 2,5 км/ч. Найдите собственную скорость лодки.

379. Электропоезд задержался в дороге на 4 мин и ликвидировал опоздание на перегоне в 20 км, пройдя со скоростью на 10 км/ч большей, чем по расписанию. С какой скоростью ехал поезд на этом перегоне?

380. Из пункта A отправили по течению реки плот. Через 5 ч 20 мин из пункта A вслед за плотом вышла моторная лодка, которая догнала плот, пройдя 20 км. Найдите скорость течения реки, зная, что лодка проходила в час на 12 км больше, чем плот.

381. На середине пути между A и B поезд задержали на 10 мин. Чтобы прибыть в B по расписанию, пришлось начальную скорость поезда увеличить на 12 км/ч. Найдите первоначальную скорость поезда, если расстояние от A до B равно 120 км.

382. Теплоход прошел вниз по реке 150 км и вернулся обратно, затратив на весь путь 5,5 ч. Найдите скорость течения реки, если скорость теплохода в стоячей воде 55 км/ч.

383. Турист проплыл на моторной лодке вверх по

реке 25 км, а обратно спустился плотом. Лодкой он плыл на 10 ч меньше, чем плотом. Найдите скорость течения реки, если скорость лодки в стоячей воде 12 км/ч.

384. Велосипедист проехал 96 км на 1,6 ч быстрее, чем предусматривал. При этом за каждый час он проезжал на 2 км больше, чем рассчитывал проезжать. С какой скоростью он ехал?

385. Из A в B, расстояние между которыми 350 км, вышел автобус. Если бы он уменьшил скорость на 5 км/ч, то в пути был бы на $1\frac{2}{3}$ ч дольше. Сколько часов идет автобус от A до B?

386. Мотоцикл ехал из одного города в другой 4 ч. Возвращаясь обратно, он первые 100 км ехал с той же скоростью, а затем уменьшил ее на 10 км/ч и потому на обратный путь затратил на 30 мин больше. Найдите расстояние между городами.

387. Рыболов направился в лодке из пункта A против течения реки. Проплыв 6 км, он бросил весла, и через 4,5 ч после выхода из A течение снова отнесло его к пункту A. Найдите скорость течения реки, если скорость лодки в стоячей воде 90 м/мин.

388. Отец и сын прошли 480 м, причем отец сделал на 200 шагов меньше сына. Найдите длину шага каждого из них, если шаг отца длиннее шага сына на 20 см.

389*. Расстояние между пристанями A и B теплоход проходит по течению за 5 ч, а против течения — за 6 ч. За сколько часов проплывет это расстояние по течению плот?

390. Катер прошел по течению 90 км за определенное время. За это же время он прошел бы против течения 70 км. Какое расстояние за это время проплывет плот?

391. Две бригады, работая вместе, закончили асфальтирование дороги за 4 дня. Сколько дней понадобилось бы на выполнение этой работы каждой бригаде отдельно, если одна из них могла бы закончить асфальтирование дороги на 6 дней раньше другой?

392. Два комбайна собрали пшеницу с поля за 4 дня. Если бы один из них собрал половину всей пшеницы, а другой — остальную, то вся пшеница была бы собрана за 9 дней. За сколько дней каждый комбайн отдельно мог бы собрать всю пшеницу с поля?

393. Бригада планировала засеять 200 га до определенного срока, но засевала ежедневно на 5 га больше, чем планировала, и потому закончила сев на 2 дня раньше намеченного срока. За сколько дней бригада закончила сев?

394. Два каменщика, выполняя определенное задание вместе, могли бы закончить его за 12 дней. Если сначала будет работать только один из них, а когда он выполнит половину всей работы, его заменит другой рабочий, то все задание будет выполнено за 25 дней. За сколько дней каждый каменщик мог бы выполнить все задание?

395. Два рабочих, из которых второй начинает работу на 1,5 дня позже первого, могут выполнить работу за 7 дней. За сколько дней каждый из них отдельно мог бы выполнить всю работу, если известно, что второй рабочий может выполнить ее на 3 дня быстрее первого?

396. Водонапорный бак наполняется двумя трубами за 2 ч 55 мин. Первая труба может наполнить его на 2 ч быстрее второй. За какое время каждая труба отдельно может наполнить бак?

397. Старинная индийская задача (Бхаскара, 1114 г.). Забавляясь, обезьяны на две группы разделились: часть восьмая их в квадрате в роще бегала, резвилась, а двенадцать что-то пели на любимом сидя месте. Сосчитайте, сколько в роще обезьянок было вместе.

398. На каждую цветущую ветку вишни сели поровну двести пчел. Если бы расцвело на 5 веток меньше, то на каждую село бы на две пчелы больше. Сколько веток расцвело на вишне и сколько пчел было на каждой?

399. Несколько точек размещены на плоскости так, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Если

каждую из них соединить отрезками со всеми остальными данными точками, получится 153 отрезка. Сколько дано точек?

400. В шахматном турнире было сыграно 66 партий. Найдите количество участников турнира, если известно, что каждый участник сыграл с каждым по одной партии.

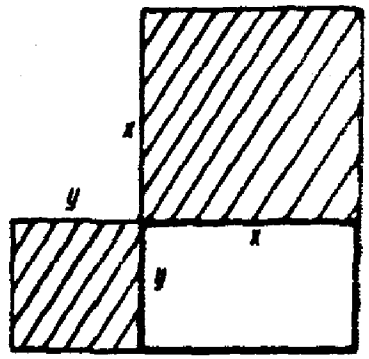


Рис. 31

401. На первенстве района по футболу сыграно 56 матчей, причем каждая команда играла с каждой по два раза. Сколько команд участвовало в игре?

402. Периметр прямоугольника равен 26 см, а сумма площадей квадратов, построенных на двух смежных сторонах прямоугольника, равна 89 см. Найдите стороны этого прямоугольника (рис. 31).

403. Периметр прямоугольника равен 32 см, а сумма площадей четырех квадратов, построенных на его сторонах,— 178 см^2. Найдите стороны прямоугольника.

404. Фотография размером 12 × 18 см наклеена на лист так, что получилась рамка одинаковой ширины. Определите ширину рамки, если известно, что фотография вместе с рамкой занимает площадь 280 см^2.

405. Дно ящика — прямоугольник, длина которого в 1,5 раза больше ширины. Высота ящика 0,5 м. Найдите объем ящика, если известно, что площадь его дна на 0,76 м^2 меньше площади боковых стенок.

406. С первого участка земли собрали 4,8 т картофеля; со второго участка, площадь которого на 0,3 га меньше первого, собрали 2 т картофеля, причем с одной сотки этого участка собрали на 200 кг меньше, чем с одной сотки первого участка. Найдите площадь каждого участка.

407. Круговой дорожкой длиной 2 км движутся в одном направлении два конькобежца, которые сходятся через каждые 20 мин (рис. 32). Найдите ско-

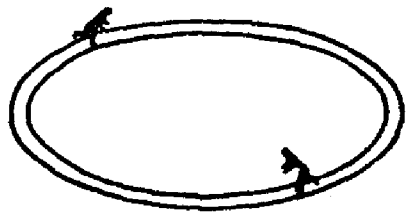


Рис. 32

рость каждого конькобежца, если первый из них пробегает окружность на 1 мин быстрее второго.

408. К раствору, содержащему 40 г соли, добавили 200 г воды, после чего его концентрация уменьшилась на 10%. Сколько воды содержал раствор и какова была его концентрация?

409. Из двух кусков металла первый имел массу 880 г, а второй 858 г, причем объем первого куска на 10 $см^3$ меньше объема второго. Найдите плотность каждого металла, если плотность первого на 1 $г/см^3$ больше плотности второго.

§ 42. Теорема Виета

Квадратное уравнение называют *приведенным*, если первый его коэффициент равен единице. В таблице даны примеры трех приведенных квадратных уравнений, их корни, сумма и произведение корней:

Уравнение	x_1 и x_2	$x_1 + x_2$	$x_1 \cdot x_2$
$x^2 - 5x + 6 = 0$	2 и 3	5	6
$x^2 - 3x - 4 = 0$	−1 и 4	3	−4
$x^2 + 8x + 15 = 0$	−5 и −3	−8	15

Сравните сумму корней каждого приведенного квадратного уравнения с его вторым коэффициентом, и произведение корней — со свободным членом.

Теорема (Виета). ***Если приведенное квадратное уравнение имеет два корня, то их сумма равна второму коэффициенту уравнения, взятому с противоположным знаком, а произведение — свободному члену.***

Доказательство. Если уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет корни x_1 и x_2, то их можно находить по формулам:

$$x_1 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \text{ и } x_2 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}. \qquad (*)$$

Сложим и перемножим эти корни:

$$x_1 + x_2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2} + \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = -p;$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{(-p)^2 - (\sqrt{p^2 - 4q})^2}{4} = \frac{p^2 - (p^2 - 4q)}{4} = q.$$

Таким образом, $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$. А это и требовалось доказать.

Примечание. Если $p^2 - 4q = 0$, то уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет один корень $x = -\frac{p}{2}$. Формулы (*) в этом случае дают $x_1 = -\frac{p}{2}$ и $x_2 = -\frac{p}{2}$. Поэтому часто считают, что данное уравнение имеет два равных корня. Теорема Виета верна и для этого случая, поскольку

$$x_1 + x_2 = -\frac{p}{2} + \left(-\frac{p}{2}\right) = -p, \quad x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{p}{2}\right)\left(-\frac{p}{2}\right) = \frac{p^2}{4} = \frac{4q}{4} = q.$$

Каждое квадратное уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) равносильно приведенному квадратному уравнению $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$. Поэтому, если такое уравнение имеет корни x_1 и x_2, то

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{и} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Теорема (обратная теореме Виета). ***Если сумма и произведение чисел m и n равны соответственно — p и q, то m и n — корни уравнения*** $x^2 + px + q = 0$.

Доказательство. Пусть $m + n = -p$ и $m \cdot n = q$. При этих условиях уравнение $x^2 + px + q = 0$ равносильно уравнению $x^2 - (m + n)x + mn = 0$.

Подставим в это уравнение вместо переменной x числа m и n.

$$m^2 - (m + n)m + mn = m^2 - m^2 - nm + mn = 0,$$

$$n^2 - (m + n)n + mn = n^2 - mn - n^2 + mn = 0.$$

Следовательно, m и n — корни данного уравнения. ▲ это и нужно было доказать.

Из теоремы Виета следует, что целые решения уравнения $x^2 + px + q = 0$ являются делителями числа q.

Пользуясь обратной теоремой, можно проверить, является та или иная пара чисел корнями приведенного квадратного уравнения, или нет. Это позволяет устно решать много таких уравнений.

Пример. Решите уравнение $x^2 + 12x + 11 = 0$.

Р е ш е н и е (устное). Если уравнение имеет целые корни, то их произведение равно 11. Это могут быть числа 1 и 11 или –1 и –11. Второй коэффициент уравнения положительный, поэтому корни отрицательные.

О т в е т. $x_1 = -1$, $x_2 = -11$.

410. Проверьте, являются ли данные числа корнями уравнения:

а) $x^2 - 8x + 7 = 0$, 1 и 7;

б) $x^2 + 8x + 15 = 0$, 3 и 5;

в) $z^2 - 12z - 13 = 0$, – 1 и 13;

г) $t^2 - 6t + 9 = 0$, 3 и 3.

411. Определите знаки корней уравнения (если они есть), не решая уравнения:

а) $x^2 - 4x + 3 = 0$; б) $x^2 - 7x + 10 = 0$;

в) $x^2 - 6x + 8 = 0$; г) $x^2 + 10x + 21 = 0$;

д) $y^2 - 15y + 44 = 0$; е) $z^2 - 8z - 48 = 0$.

412. Решите устно уравнение:

а) $x^2 - 3x + 2 = 0$; б) $x^2 - 4x - 5 = 0$;

в) $x^2 + 5x + 6 = 0$; г) $x^2 + x - 20 = 0$;

д) $y^2 + 5y - 14 = 0$; е) $z^2 - 2z - 15 = 0$;

ё) $c^2 + 2c - 8 = 0$; ж) $t^2 + 9t - 10 = 0$.

413. Уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет корни 0,7 и 10. Найдите его коэффициенты p и q.

414. Уравнение $x^2 + kx + t = 0$ имеет корни -3 и $\frac{1}{3}$. Найдите $5t$.

415. Составьте приведенное квадратное уравнение,

корни которого равны: а) 2 и 4; б) – 3 и 5; в) 0,5 и 4; г) $\frac{1}{7}$ и 7; д) $2 - \sqrt{3}$ и $2 + \sqrt{3}$.

416. Один из корней уравнения $x^2 + 14x + c = 0$ равен 7. Найдите второй корень и число c.

417. Один из корней уравнения $x^2 + px + 8 = 0$ равен $\frac{1}{2}$. Найдите второй корень и коэффициент p.

418. Разность корней уравнения $x^2 + 6x + q = 0$ равна 8. Найдите его корни и число q.

419. Разность корней уравнения $2x^2 + 3x + c = 0$ равна 2,5. Найдите число c.

420. Найдите корни уравнения $x^2 - 81x + q = 0$, если один из них: а) вдвое больше второго; б) составляет $\frac{4}{5}$ второго.

421. Докажите, что уравнение не может иметь корней с одинаковыми знаками:

а) $5x^2 + 26x - 24 = 0$; б) $324x^2 - 175x - 123 = 0$.

422. Докажите, что уравнение:

а) $x^2 - 2x - 1 = 0$ имеет корни $1 - \sqrt{2}$ и $1 + \sqrt{2}$;

б) $y^2 - 4y - 1 = 0$ имеет корни $2 - \sqrt{5}$ и $2 + \sqrt{5}$;

в) $z^2 - z - 1 = 0$ имеет корни $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ и $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Вариант 1

1. Решите уравнение:

а) $3x^2 - 27 = 0$; б) $4z^2 + z = 0$;

в) $y^2 - 9y + 14 = 0$; г) $\frac{15}{x} - 3x = 14$.

2. Найдите стороны прямоугольника, если одна из них на 3,5 см длиннее другой, а площадь прямоугольника равна 92 см^2.

Вариант 2

1. Решите уравнение:

а) $2x^2 - 50 = 0$; **б)** $9z^2 - z = 0$;

в) $y^2 + 2y = 15$; **г)** $\frac{18}{x} - 5x = 27$.

2. Найдите стороны прямоугольника, если одна из них на 2,6 см короче другой, а площадь прямоугольника равна 5,6 см^2.

Вариант 3

1. Решите уравнение:

а) $5z^2 - 20 = 0$; **б)** $9x^2 + 4x = 0$;

в) $y^2 + y = 12$; **г)** $\frac{16}{x} - 7x = 24$.

2. Найдите два числа, сумма которых равна 8,5, а произведение 15.

Вариант 4

1. Решите уравнение:

а) $7c^2 - 28 = 0$; **б)** $4x^2 - 9x = 0$;

в) $y^2 - 3y = 10$; **г)** $\frac{12}{x} - 5x = 28$.

2. Найдите два числа, сумма которых равна 47, а произведение 510.

Глава VIII

ФУНКЦИИ

§ 43. Что такое функция?

Площадь квадрата зависит от его стороны. Каждому значению длины стороны квадрата a соответствует единственное значение его площади S (рис. 33).

Масса куска мела зависит от его объема. Каждому значению объема V куска мела соответствует единственное значение его массы m.

Каждому значению температуры воздуха t соответствует единственное значение высоты h столбика жидкости в термометре.

Каждому значению переменной x соответствует единственное значение выражения $2x - 1$.

Подобных примеров соответствия переменных можно привести много. Для науки важно уметь исследовать такие соответствия. Их называют функциональными соответствиями, или *функциями*.

Если каждому значению переменной x из некоторого множества M соответствует одно значение переменной y, то переменную y называют *функцией* от x. Переменную x в этом случае называют *аргументом данной функции*, множество M — *областью определения функции*, а соответствие между x и y — *функциональным соответствием*. Аргумент еще называют *независимой переменной*, а функцию — *зависимой переменной*, так как значение функции зависит от значения аргумента.

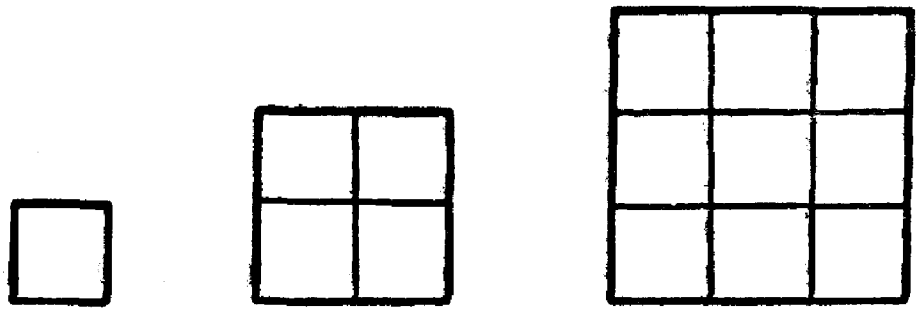


Рис. 33

Например, площадь S квадрата — функция от длины его стороны a. Здесь S — функция, a — аргумент. Область определения этой функции: множество всех положительных чисел.

Высота h столбика жидкости в термометре — функция от температуры t. Здесь h — функция, t — аргумент. Если шкала термометра имеет деления от -50° до 50°, то область определения этой функции — множество всех действительных чисел, которые больше -50° и меньше 50°.

Задавать функциональные соответствия можно разными способами. Часто задают их формулами. Например, соответствие между длиной a стороны квадрата и его площадью S можно задать формулой $S = a^2$.

Соответствие между радиусом r окружности и длиной C окружности можно задать формулой $C = 2\pi r$.

Соответствие между значениями переменной x и значениями y выражения $2x - 1$ можно задать формулой $y = 2x - 1$.

Примечание. Часто функцией называют не только зависимую переменную, но и функциональное соответствие. Например, говорят «Функция, заданная формулой $y = 2x - 1$», или еще короче: «функция $y = 2x - 1$».

Задание функции формулой удобно, поскольку дает возможность определить значение функции для любого значения аргумента. Такое задание функции достаточно экономное: в большинстве случаев формула занимает одну строку.

Если функцию задают формулой и не указывают область определения, то считается, что эта область — множество всех значений переменной, при которых эта формула имеет смысл. Например, область определения функции $y = 2x - 1$ — множество всех действительных чисел, а $y = \sqrt{1 - x}$ — множество действительных чисел, не больших 1.

Задавать функции можно и таблицами. Например, функцию $y = 2x - 1$ для первых десяти натуральных значений x можно задать такой таблицей:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19

Таблицы квадратов чисел, таблицы синусов, косинусов, тангенсов углов — все это задания функций с помощью таблиц.

Табличный способ задания функции удобен тем, что для нахождения ее значений не нужно делать никаких вычислений. Неудобен он тем, что таблица занимает достаточно много места. К тому же в таблице задаются значения функции не для всех значений аргумента, а только для некоторых.

423. Зависит ли периметр квадрата от его стороны? Является ли периметр квадрата функцией от длины стороны квадрата?

424. Выразите формулой соответствие между длиной a стороны равностороннего треугольника и его периметром P. Является ли переменная P функцией от a?

425. Объем куба находят по формуле $V = a^3$, где a — длина ребра куба. Задает ли эта формула функцию? Назовите ее аргумент.

426. Площадь круга находят по формуле $S = \pi r^2$, где r — радиус круга. Задает ли эта формула функцию? Найдите ее область определения.

427. Плотность меди 8,6 г/см^3. Выразите формулой соответствия между объемом V куска меди и его массой m. Является ли m функцией от V? Укажите ее аргумент и область определения.

428. Скорость автобуса 55 км/ч. Как зависит пройденный автобусом путь s от времени t? Является ли переменная s функцией от t?

429. Площадь прямоугольника со сторонами 5 см и x см равна S см^2. Является ли переменная S функцией от x? Укажите ее аргумент.

430. α и β — меры смежных углов. Задайте формулой зависимость α от β. Является ли α функцией от β? Найдите ее аргумент.

431. α и β — меры вписанного и соответствующего

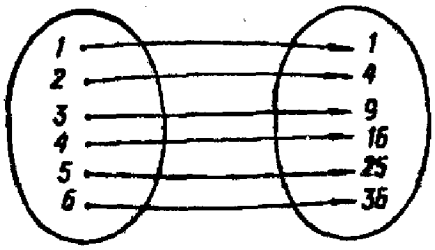


Рис. 34

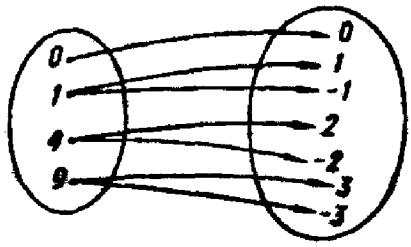


Рис. 35

ему центрального углов. Задайте формулой соответствие между α и β. Является ли это соответствие функцией? Укажите ее аргумент и область определения.

432. Соответствие между шестью первыми натуральными числами и их квадратами изображено на рисунке 34. Является ли это соответствие функцией? Какая ее область определения?

433. На рисунке 35 изображено соответствие между числами 0, 1, 4, 9 и их квадратными корнями. Является ли это соответствие функцией?

434. Функция задана формулой $y = 2x + 5$. Найдите значение функции, если x равно: 1; 0; –3; 7; 1000.

435. Функция задана формулой $y = \frac{6}{x}$. Заполните таблицу:

x	– 6	– 5	– 4	– 3	– 2	– 1	0	1	2	3	4	5	6
y													

436°. Составьте таблицу значений функции $m = 42 - 3n$ для первых десяти натуральных значений переменной n.

437°. Составьте таблицу значений функции $y = \frac{60}{x+1}$ для целых значений аргумента x при $-5 \leqslant x \leqslant 5$.

438°. Функция задана формулой $y = \frac{2}{3}x$. При каком значении аргумента значение функции равно 20?

439. Функция задана формулой $y = 0{,}3x$. Заполните таблицу:

x	– 10	– 3					
y			– 0,3	0	1,2	1,5	15

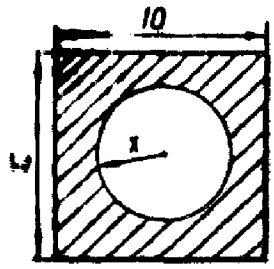


Рис. 36

440. У ученика было 5 грн. Он купил x карандашей по 60 к. за штуку, после чего у него осталось y к. Задайте формулой функцию, выражающую зависимость y от x. Найдите ее область определения.

441. Из квадрата, сторона которого равна 10 см, вырезали круг радиуса x см (рис. 36). Как зависит площадь полученной фигуры от x? Найдите область определения этой функции.

442°. Найдите область определения функции, заданной формулой:

а) $y = \frac{3}{4}x$; б) $y = \frac{3}{4x}$;

в) $y = \frac{3}{4 + x}$; г) $y = \frac{1}{x\,(x - 3)}$;

д) $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x - 3}$; е) $y = \sqrt{2 - x}$.

443*. Найдите область определения функции:

а) $y = \frac{1}{x} + \sqrt{1 - x}$; б) $y = \sqrt{x} + \sqrt{3 - x}$;

в) $y = \sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x}$.

§ 44. График функции

На рисунке 37 изображена координатная плоскость с осью абсцисс x, осью ординат y и началом координат т. O. Точка A $(-2; 3)$ имеет координаты -2 и 3; ее абсцисса равна -2, ордината 3. Припомните эти понятия, с которыми вы ознакомились в прошлом году, так как далее мы будем пользоваться ими довольно часто.

Пусть имеем функцию $y = 2x - 3$, где $-1 \leqslant x \leqslant 5$. Составим таблицу значений этой функции для целых значений аргумента:

x	-1	0	1	2	3	4	5
y	-5	-3	-1	1	3	5	7

Отметим точки, координаты которых даны в таб-

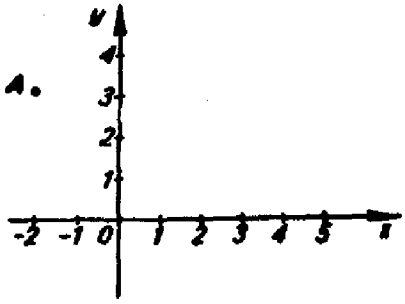


Рис. 37

лице. То есть нанесем на координатную плоскость точки, абсциссы которых равны значениям аргумента x данной функции, а ординаты — соответствующим значениям функции y, например, $A\,(-1;\,-5)$, $B\,(0;\,-3)$ и т. д. Получим 7 точек (рис. 38, *а*), расположенных на одной прямой.

Придадим аргументу x еще несколько дробных значений и вычислим соответствующие им значения функции:

x	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{9}{2}$
y	-4	-2	0	2	4	6

Отметим точки, координаты которых даны в этой таблице (рис. 38, *б*). Они расположены на той же прямой. Если придавать аргументу x другие значения, в том числе иррациональные, и отмечать на координатной плоскости соответствующие точки, то эти точки образуют отрезок (рис. 38, *в*). Этот отрезок — график функции $y = 2x - 3$ при $-1 \leqslant x \leqslant 5$.

Графиком функции называется множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты — соответствующим значениям функции.

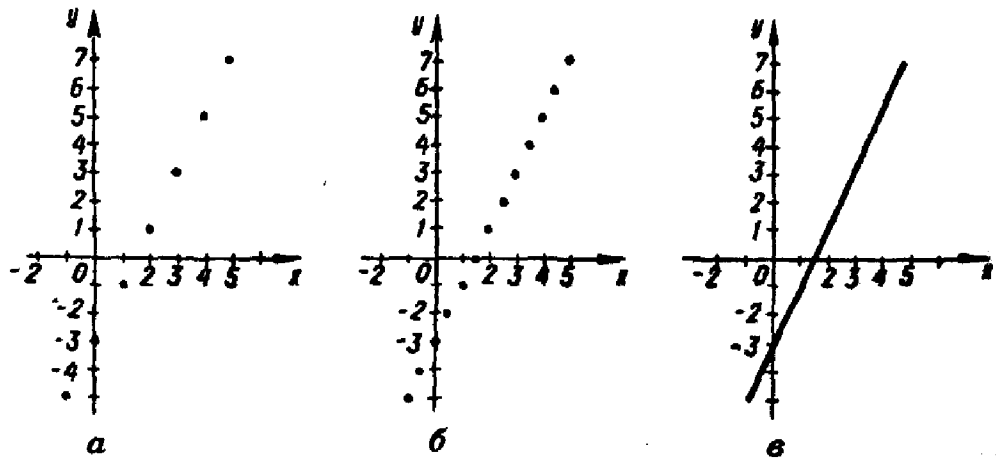


Рис. 38

Если описанным способом построить график функции $y = \frac{6}{x}$ при условии, что $1 \leqslant x \leqslant 6$, получим кривую линию, изображенную на рисунке 39 (выполните построение самостоятельно).

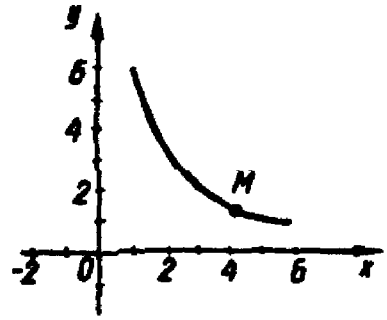


Рис. 39

Имея график функции, можно для любого значения аргумента (из области определения) указать соответствующее значение функции. Для примера найдем значение функции $y = \frac{6}{x}$ при $x = 4$, используя построенный график (рис. 39). Ищем на оси x точку 4, на графике находим точку M с абсциссой 4, а на оси ординат — ординату точки M. Она равна 1,5.

Пользуясь графиком функции, можно составить таблицу ее значений. Следовательно, график задает функцию. Графический способ задания функции удобен своей наглядностью. Глядя на график, сразу можно сказать, при каких значениях аргумента значения функции положительны, при каких — отрицательны, при каких равны нулю и т. п. Например, по рисунку 38, *в* видно, что на всей области определения функция $y = 2x - 3$ *возрастающая* (большему значению аргумента соответствует большее значение функции), а функция $y = \frac{6}{x}$ при $1 \leqslant x \leqslant 6$ *убывающая* (большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции).

Существуют приборы, сами чертящие графики функций: барографы, термографы, кардиографы и т. д. На рисунке 40 схематически изображен термограф. Его

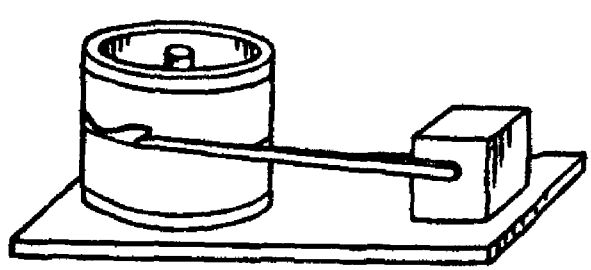


Рис. 40

барабан равномерно вращается с помощью часового механизма. На барабан намотана полоса бумаги, которой касается карандаш, то поднимающийся, то опускающийся в зависимости от температуры. Такой термограф можно доставить в нужное место и он будет отмечать там изменение температуры за сутки, за неделю, за месяц. Специалисты расшифровывают такие графики.

444. Функция задана формулой $y = \frac{12}{x}$ при $1 \leqslant x \leqslant 12$. Заполните таблицу:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y												

Постройте график функции.

445°. Постройте график функции:

а) $y = 2x - 1$ при $0 \leqslant x \leqslant 7$;

б) $y = 0{,}5x + 3$ при $-6 \leqslant x \leqslant 6$;

в) $y = \frac{2}{3}x + 1$ при $-3 \leqslant x \leqslant 6$;

г) $y = -x$ при $-5 \leqslant x \leqslant 4$;

д) $y = x^2$ при $-3 \leqslant x \leqslant 3$;

е) $y = x(1 - x)$ при $-4 \leqslant x \leqslant 4$;

446. На рисунке 41 изображен график функции. Найдите значения этой функции, соответствующие таким значениям аргумента: -3; -1; 0; 1; 4.

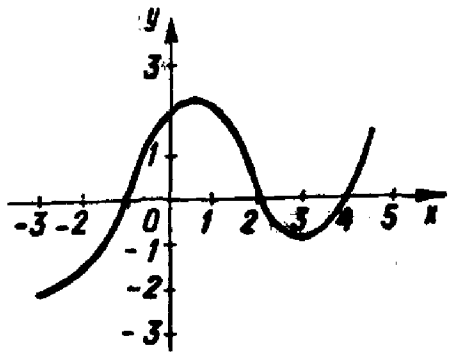


Рис. 41

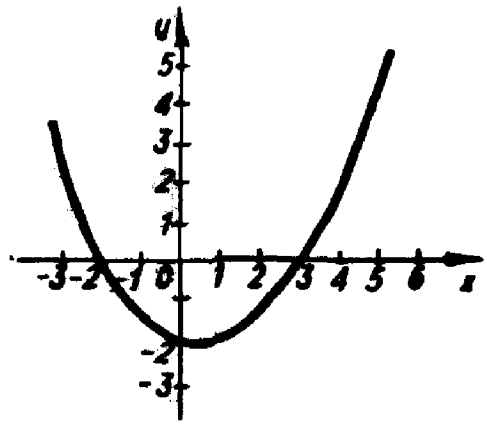


Рис. 42

447. По графику функции, изображенному на рисунке 42, заполните таблицу:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y									

448. Дана функция $y = \frac{1}{3}x + 5$ при $-9 \leqslant x \leqslant 9$. Принадлежит ли графику функции точка A (6;7)? А точки B (12; 9), C (3; 8)?

449. Пользуясь графиком температуры воздуха за сутки (рис. 43) скажите, в котором часу температура воздуха:

а) была самой низкой; самой высокой;

б) равнялась 0°, 1°, -5°.

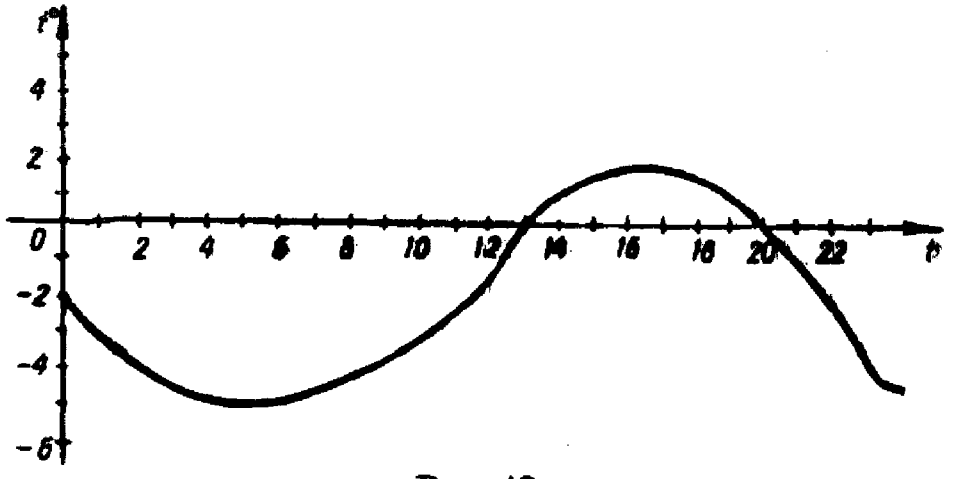


Рис. 43

450. Является ли графиком функции линия, изображенная на рисунке 44?

Р е ш е н и е. На данной линии есть три разные точки с абсциссами 4. Если бы такая функция y от аргумента x существовала, то одному значению $x = 4$ соответствовало бы три различные значения функции, что противоречит определению функции.

О т в е т. Данная линия не является графиком функции.

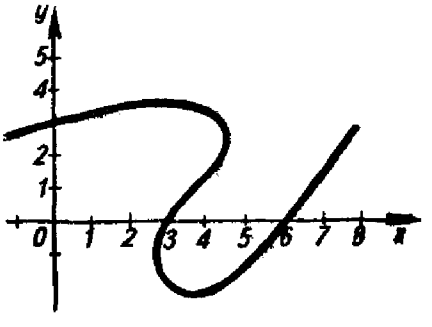


Рис. 44

451. Функция $y = 0{,}5x + 3$ задана на множестве натуральных чисел, не больших 8. Постройте ее график.

452. Функция $y = 5 - x$ задана на множестве целых чисел, удовлетворяющих условию $-7 \leqslant x \leqslant 7$. Постройте график этой функции.

§ 45. Линейная функция

Многие функции, с которыми приходится иметь дело специалистам, можно задать формулой $y = kx + b$, где k и b — данные числа. Например, если масса пустой бочки равна 30 кг, а плотность бензина 0,8, то зависимость между массой m бочки с бензином и объемом V л бензина в ней можно выразить формулой $m = 0{,}8\,V + 30$.

Если масса одного метра проволоки равна 50 г, а катушки без проволоки 200 г, то зависимость между массой m катушки с проволокой и длиной l м намотанной на нее проволоки можно выразить формулой $m = 50\,l + 200$.

Такие функции называют линейными.

Линейной называется функция, которую можно задать формулой вида $y = kx + b$, где x — аргумент, а k и b — данные числа.

Рассмотрим две линейные функции, заданные формулами

$$y = 2x - 3 \quad \text{и} \quad y = -0{,}5x + 2,$$

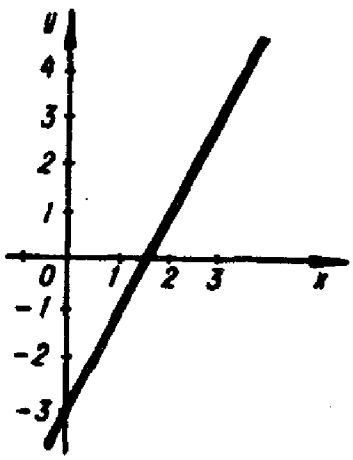


Рис. 45

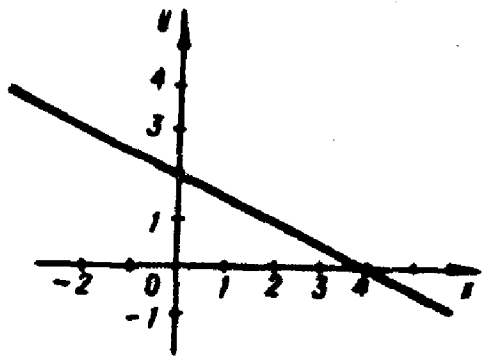


Рис. 46

на множестве всех действительных чисел. Описанным в предыдущем параграфе способом, построим графики данных функций (рис. 45 и 46). Видим, что график каждой из рассматриваемых функций — прямая. Можно доказать, что ***график каждой линейной функции — прямая. И каждая прямая на координатной плоскости, не перпендикулярная к оси абсцисс,— график некоторой линейной функции.***

График линейной функции является одновременно графиком некоторого линейного уравнения с двумя переменными (линейные уравнения и их графики рассматривались в 7-м классе). Например, уравнения $3x + 2y = 6$ и $y = -1{,}5x + 3$ равносильны, им соответствуют одинаковые графики. Поэтому прямая, являющаяся графиком уравнения $3x + 2y = 6$, будет также графиком функции, заданной формулой $y = -1{,}5x + 3$.

Поскольку график каждой линейной функции — прямая, для его построения достаточно знать координаты двух его точек. Например, чтобы построить график функции $y = -1{,}5x + 3$, достаточно составить таблицу для двух каких-нибудь значений аргумента, например такую:

x	0	2
y	3	0

Отметив на координатной плоскости точки с координатами 0 и 3, 2 и 0, проведем через них прямую (рис. 47, *а*). Это и есть график функции $y = -1{,}5x + 3$.

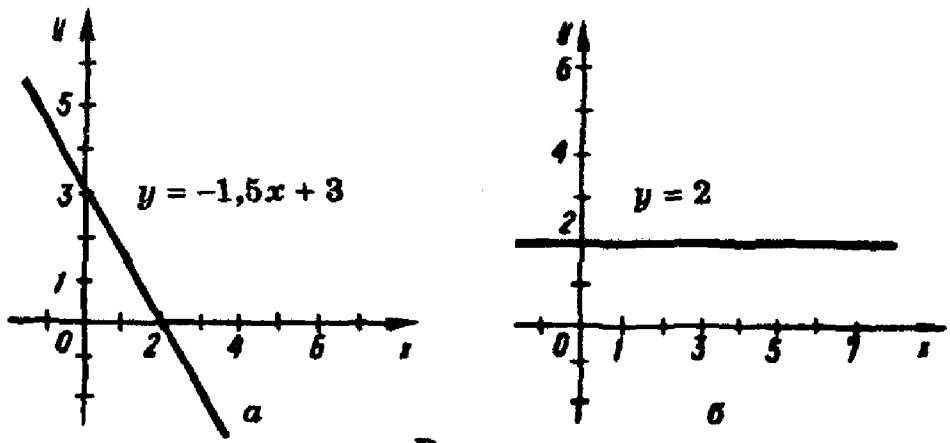


Рис. 47

Рассмотрим частные случаи линейных функций.

При $k = 0$ функция

$$y = kx + b$$

имеет вид $y = b$. График такой функции — *прямая, параллельная оси x* (рис. 47, *б*).

При $b = 0$, $k \neq 0$, линейная функция имеет вид

$$y = kx.$$

Такую функцию называют *прямой пропорциональностью*, поскольку какие-либо (отличные от нуля) значения такой функции пропорциональны соответствующим значениям аргумента. Например, рассмотрим таблицу значений функции $y = 3x$:

x	-2	-1	1	2	3	4	5
y	-6	-3	3	6	9	12	15

Здесь числа 12 и 15 пропорциональны числам 4 и 5, ведь $12 : 15 = 4 : 5$; числа -6 и 9 пропорциональны числам -2 и 3, ведь $-6 : 9 = -2 : 3$ и т. д.

График каждой прямой пропорциональности — *прямая, проходящая через начало координат*. На рисунке 48 изображены графики функций $y = 2x$, $y = -x$ и $y = 0{,}3x$.

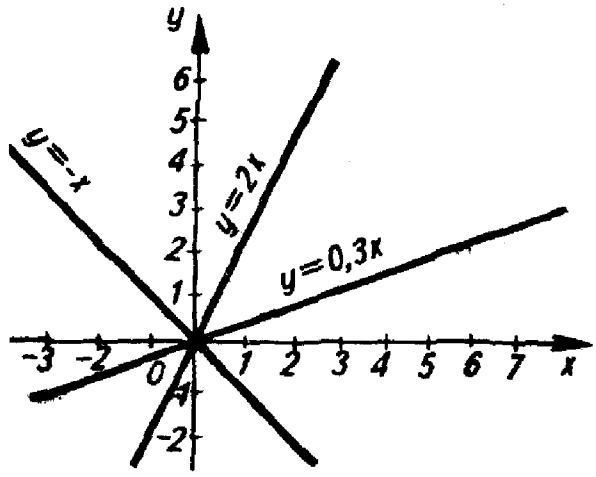


Рис. 48

453. Линейная ли функция, заданная формулой:

а) $y = 5x + 0{,}2$; б) $y = -3{,}5x + 2$; в) $y = 3 - 2x$;

г) $y = x + 5$; д) $y = \frac{2x - 5}{3}$; е) $y = \frac{1 - 2x}{2}$?

454. Какая из данных функций линейная:

а) $y = x$; б) $y = -x$; в) $y = x^2$?

455. Линейная функция задана формулой $y = 0{,}5x + 3$. Какое значение этой функции соответствует значению $x = -2$? При каком значении аргумента значение функции равно 6,5?

456. Составьте таблицу значений функции $y = \frac{x}{2} + 4$ для всех целых значений x, удовлетворяющих условию $-3 \leqslant x \leqslant 4$.

457. Постройте график функции:

а) $y = 3x - 2$; б) $y = -0{,}6x$; в) $y = 1 - 0{,}3x$;

г) $y = \frac{2}{3}x + 1$; д) $y = \frac{x + 3}{2}$; е) $y = \frac{1 - 3x}{3}$.

458. Постройте график функции:

а) $m = 2t - 3$ при $-2 \leqslant t \leqslant 3$;

б) $p = 0{,}8a + 2$ при $2 \leqslant a \leqslant 5$.

459. Постройте график функции $y = -3x + 2$. Найдите координаты точек пересечения графика с осями координат. При каких значениях x значения функции положительны, при каких — отрицательны? Возрастающая или убывающая данная функция?

460. Не выполняя построения, найдите координаты точек пересечения с осями координат графика функции:

а) $y = 4x + 8$; б) $y = -x + 3$; в) $y = 0{,}5 - 2x$.

461. Проходит ли график функции $y = 2x - 1$ через точку: а) A (3; 5); б) B (– 10; – 5); в) C (100; 99)?

462. Постройте график функции:

а) $y = 0x + 3$; б) $y = 2$; в) $y = -3$.

463. Какая из функций является прямой пропорциональностью:

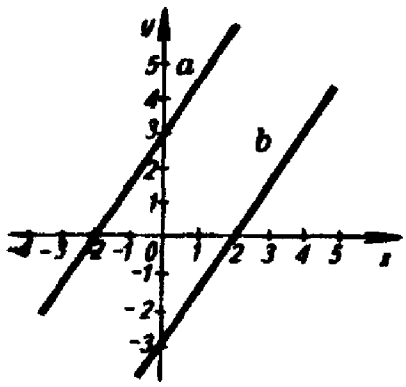


Рис. 49

а) $y = x$; б) $y = -\frac{x}{3}$;

в) $y = -x$; г) $y = \sqrt{2}x$?

Постройте графики этих функций. Какая из них возрастающая, какая убывающая?

464*. График функции — прямая, проходящая через точки A (0; 2) и B (3; 0). Задайте эту функцию формулой.

465*. Постройте график уравнения $2x - 3y = 1$. Графиком какой функции является график данного уравнения?

466*. Прямые a и b размещены, как показано на рисунке 49. Графиками каких функций являются прямые a и b?

§ 46. Обратная пропорциональность

Пусть длина и ширина прямоугольника равны x и y, а площадь 6 м^2. Зависимость y от x можно выразить формулой $y = \frac{6}{x}$. При увеличении в несколько раз значения аргумента x соответствующее значение функции y уменьшится во столько же раз. Следовательно, переменная y обратно пропорциональна переменной x. Это справедливо для каждой функции, заданной формулой $y = \frac{k}{x}$ при положительных значениях k и x. Такую функцию называют *обратной пропорциональностью*.

Рассмотрим функцию, заданную формулой $y = \frac{k}{x}$, где k — любое действительное число, отличное от нуля, аргумент x принимает положительные и отрицательные значения. Например, дана функция $y = \frac{6}{x}$. Область ее определения — множество всех действительных чисел, кроме $x = 0$ (т. к. на 0 делить нельзя). Составим таблицу значений этой функции для нескольких значений аргумента:

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
y	-1	$-1{,}2$	$-1{,}5$	-2	-3	-6	–	6	3	2	$1{,}5$	$1{,}2$	1

Отметим точки, координаты которых даны в таблице (рис. 50, *а*). Если бы на этой же координатной плоскости отметили больше точек, координаты которых удовлетворяют равенству $y = \frac{6}{x}$, они расположились бы, как показано на рисунке 50, *б*. Если для каждого действительного значения x, кроме $x = 0$, по формуле $y = \frac{6}{x}$ вычислили соответствующее значение y и нанесли бы все точки с полученными координатами на координатную плоскость, получили бы график данной функции (рис. 50, *в*). Такую линию называют *гиперболой*. Гипербола состоит *из двух веток*.

График функции $y = \frac{6}{x}$ — гипербола, симметричная относительно начала координат. Ее ветки находятся в первом и третьем координатных углах. (Оси координат разбивают координатную плоскость на четыре координатных угла, их принято нумеровать, как показано на рисунке 51.)

Если подобным способом построить график функции $y = -\frac{12}{x}$, получим также гиперболу; ее ветки находятся во втором и четвертом координатных углах (рис. 52).

График каждой функции $y = \frac{k}{x}$, где k — отличное от нуля данное число, — гипербола, симметричная от-

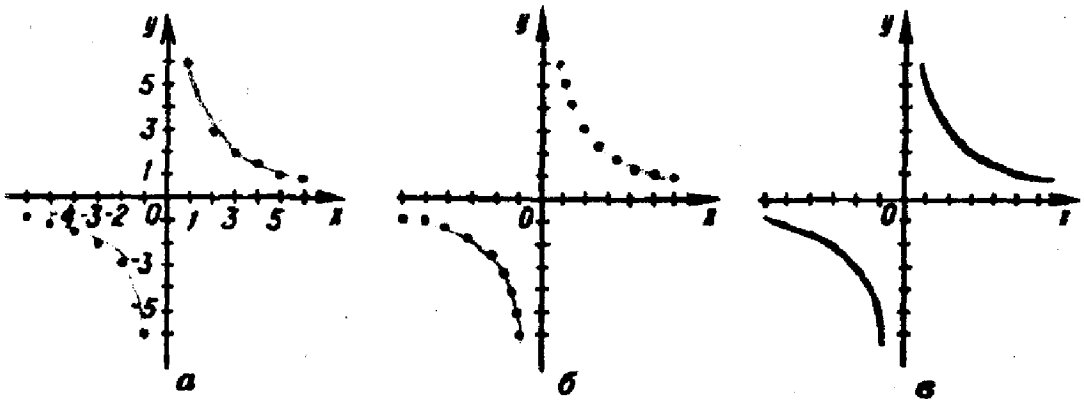


Рис. 50

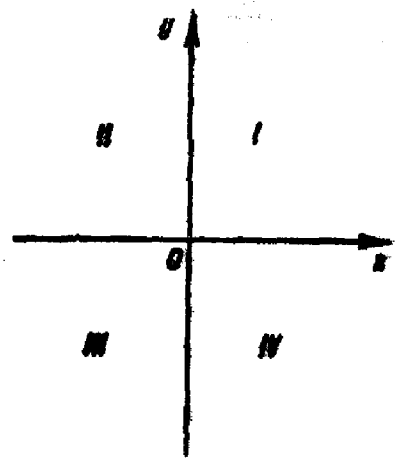


Рис. 51

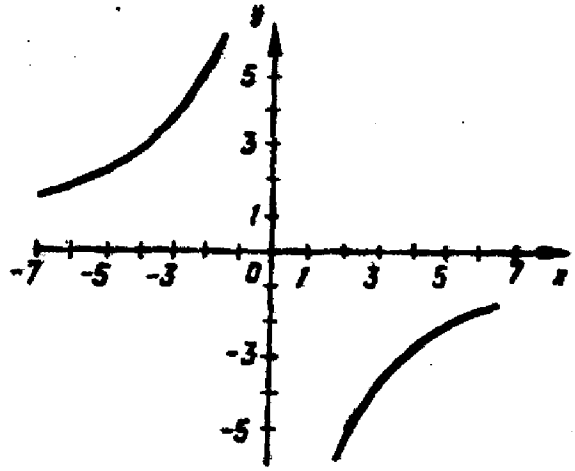


Рис. 52

носительно начала координат. При $k > 0$ ветки гиперболы находятся в I и III координатных углах, при $k < 0$ — во II и IV.

467. Стороны прямоугольника равны x и y, а площадь 60 см^2. Выразите формулой зависимость y от x.

468. Составьте таблицу значений функции $y = -\frac{12}{x}$, для целых значений x при $-6 \leqslant x \leqslant 6$.

469. Составьте таблицу значений функции $y = \frac{12}{x}$ для натуральных значений x, меньших 13. Запишите несколько пропорций, используя таблицу.

470°. Постройте график функции:

а) $y = \frac{12}{x}$; б) $y = \frac{1}{x}$; в) $y = -\frac{1}{x}$.

471. Найдите область определения функции:

а) $y = \frac{0{,}5}{x}$; б) $y = \frac{\sqrt{3}}{x}$; в) $y = \frac{1+\sqrt{2}}{x}$.

472. Функция задана формулой $y = \frac{10}{x}$. Какое значение функции соответствует значению $x = 0{,}2$? При каком значении аргумента значение функции равно -5?

473. Функция задана формулой $y = \frac{8}{x}$. Заполните таблицу:

x							
y	1	2	4	8	16	32	64

474. Пересекает ли график функции $y = \frac{2}{x}$ ось абсцисс; ось ординат?

475. При каком значении k график функции $y = \frac{k}{x}$ проходит через точку: а) A (1; 1); б) B (2; 3); в) C (1; –3)?

476. График функции $y = \frac{k}{x}$ проходит через точку A (2; 1). Проходит ли он через точку: B (1; 2), C (–2; –1), K (–1; –2)?

477. График функции $y = \frac{k}{x}$ проходит через точку A (–3; 3). Покажите, что он проходит и через точку B (3; –3). Обобщите задачу.

478. Постройте в одной системе координат графики функций $y = \frac{30}{x}$ и $y = -\frac{30}{x}$ для $x > 0$. Как расположены эти графики?

479. Верно ли, что при равномерном движении время, затраченное поездом на 10 км пути, обратно пропорционально скорости?

480. Три трактора должны вспахать поле за 48 ч. За сколько часов вспашут это поле четыре трактора?

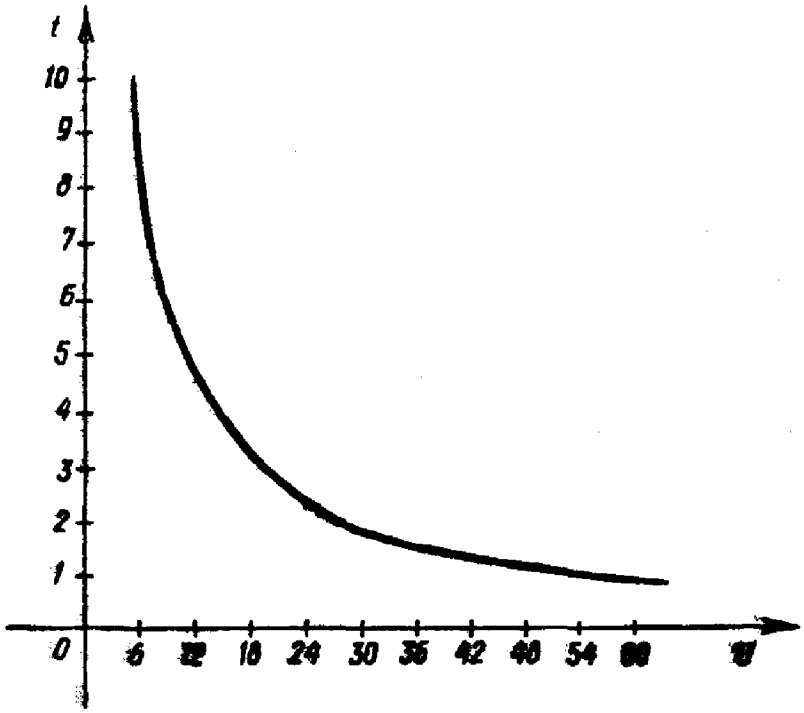


Рис. 58

481. Какой брусок имеет больший объем и во сколько раз медный или алюминиевый, если массы их равны? Плотность меди 8,6 г/см^3, алюминия — 2,6 г/см^3.

482. На рисунке 53 изображен график зависимости времени, затраченного на путь от пункта A до пункта B, от скорости движения. Какое расстояние от A до B? Сколько нужно времени, чтобы прибыть из A в B, двигаясь со скоростью 6 км/ч; 30 км/ч; 60 км/ч? С какой скоростью нужно двигаться, чтобы добраться от A до B за 1 ч; за 2 ч; за 10 ч?

483*. Постройте в одной системе координат графики функций $y = \frac{6}{x}$ и $y = 5 - x$. Глядя на графики, назовите корни уравнения $\frac{6}{x} = 5 - x$.

§ 47. Функции $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$

Рассмотрим функцию, заданную формулой $y = x^2$.

Область ее определения — множество всех действительных чисел.

Составим таблицу значений функции для некоторых значений аргумента x:

x	−3	−2,5	−2	−1,5	−1	0	1	1,5	2	2,5	3
y	9	6,25	4	2,25	1	0	1	2,25	4	6,25	9

Отметим точки, координаты которых даны в этой таблице (рис. 54, *а*). Если бы на координатной плоскости отметили больше точек с координатами x и y, удовлетворяющих формуле $y = x^2$, они бы расположились так, как показано на рисунке 54, *б*. Если бы для каждого действительного значения x по формуле $y = x^2$ вычислили соответствующее значение y и отметили точки с такими координатами на координатной плоскости, то получили бы непрерывную кривую линию, называемую *параболой* (рис. 54, *в*). Парабола состоит из *двух бесконечных веток*, плавно сходящихся в одной точке — *вершине параболы*.

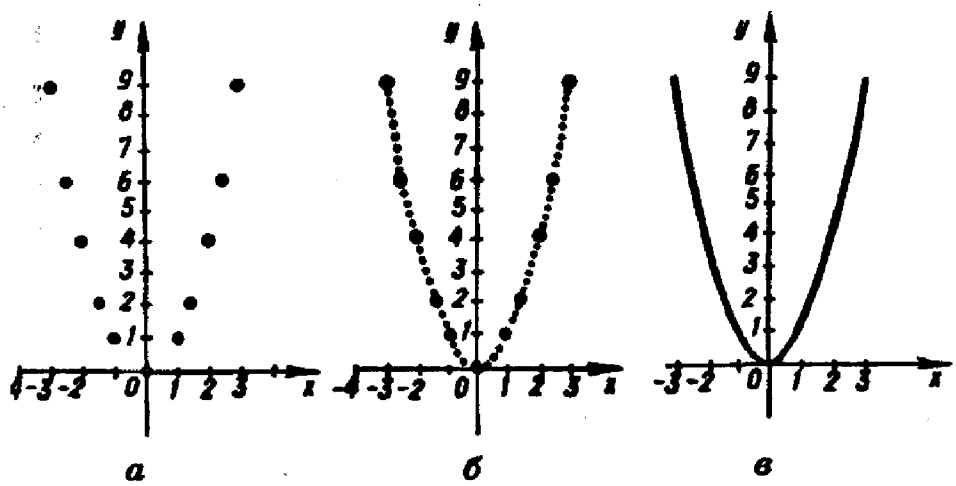


Рис. 54

остроенный график позволяет наглядно опреде- свойства функции $y = x^2$.

Если $x = 0$, *то* $y = 0$ (график проходит через точку ; 0)) .

При всех значениях x *значения функции неот-тельны* (ниже оси x нет ни одной точки графика).

Противоположным значениям аргумента соот-твуют равные значения функции (график сим-ичен относительно оси y).

При $x < 0$ *функция убывает* (ее график «идет »), *при* $x < 0$ *функция возрастает* (ее график на-лен вверх).

ассмотрим свойства функции $y = \sqrt{x}$. Область ее деления — множество неотрицательных действи-ных чисел, поскольку только из неотрицательного а можно извлечь квадратный корень.

оставим таблицу значений функции для нескользначений аргумента x (дробные округлим).

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	1,41	1,73	2	2,24	2,45	2,65	2,83	3

гметим точки с координатами, данными в этой ице (рис. 55, *а*). Если на координатной плоскости тить точки с координатами x и y при условии, что менная x принимает все неотрицательные дей-тельные значения, то получим график функции

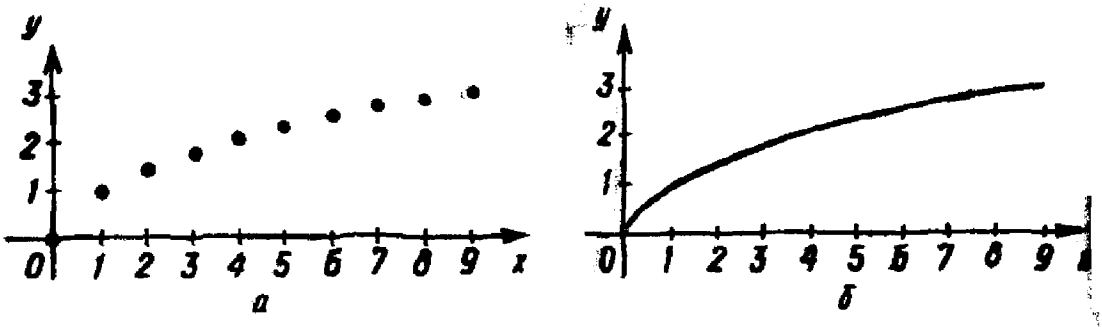


Рис. 55

$y = \sqrt{x}$ (рис. 55, *б*). Этот график — *одна ветка параболы*, она выходит из начала координат и расположена в первом координатном углу. График стремится вверх, следовательно, функция $y = \sqrt{x}$ *возрастает* на всей области определения.

В современной математике графики функций используют довольно часто. Мы остановимся только на *графическом решении уравнений*.

Пример. Решите уравнение $\frac{8}{x} - \sqrt{x} = 0$.

Заменим данное уравнение равносильным ему уравнением $\frac{8}{x} = \sqrt{x}$ и построим в одной системе координат графики функций $y = \frac{8}{x}$ и $y = \sqrt{x}$ (рис. 56). Эти графики пересекаются в точке с абсциссой $x \approx 4$.

При таком значении x выражения $\frac{8}{x}$ и $\sqrt{x}$ принимают равные значения, т. е. число 4 — корень (возможно,

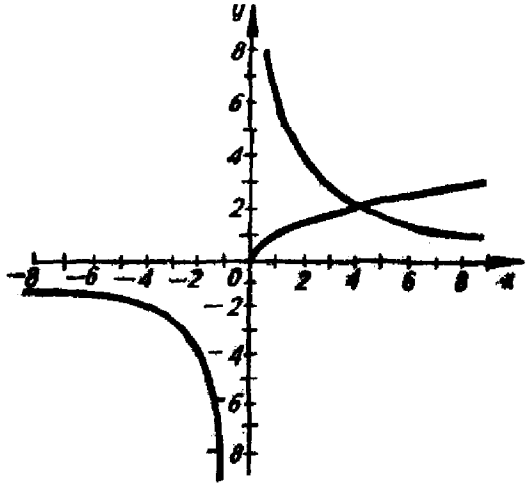


Рис. 56

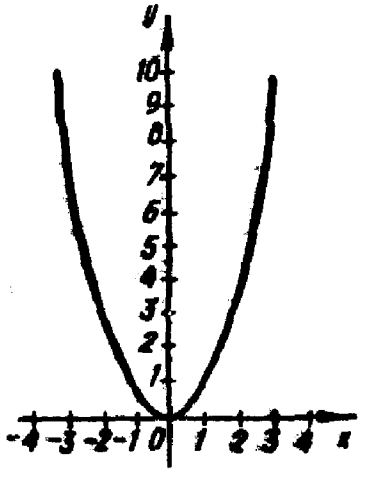


Рис. 57

приближенный) уравнения $\frac{8}{x} = \sqrt{x}$. Подставив $x = 4$ в данное уравнение, убеждаемся, что 4 — точный корень. Других общих точек построенные графики не имеют, следовательно, данное уравнение имеет единственный корень: $x = 4$.

484. Постройте график функции $y = x^2$:

а) при $0 \leqslant x \leqslant 4$; б) при $-4 \leqslant x \leqslant 0$;

в) при $-3 \leqslant x \leqslant 3$.

485. Постройте график функции, выражающей зависимость площади квадрата от длины его стороны.

486°. Проходит ли график функции $y = x^2$ через точки A (5; 25), B (—5; 25), C (5; —25)?

487. Используя график функции $y = x^2$, изображенный на рисунке 57, найдите:

а) приближенные значения функции, если значения x равны: 1,2; 3,1; −2,3;

б) значения x, при которых значения y равны: 4; 5; 6;

в) целые значения x, при которых значения функции меньше 5;

г) значения аргумента, при которых значение функции — целые числа, не больше 7.

488. Сравните значения функции $y = x^2$ при $x = -2{,}36$ и $x = 2{,}35$.

489. Постройте график функции $y = \sqrt{x}$ при $0 \leqslant x \leqslant 10$.

490. Проходит ли график функции $y = \sqrt{x}$ через точки A (16; 4), B (16; −4), C (−5; 25), K (10; $\sqrt{10}$)?

491. Используя график функции $y = \sqrt{x}$ (рис. 58), найдите:

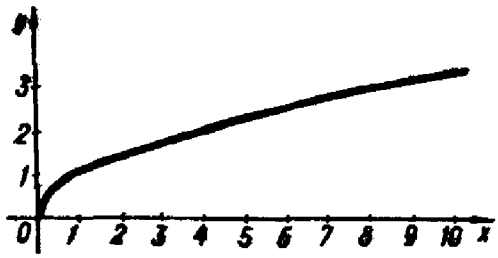


Рис. 58

а) значения функции, если значения x равны: 0,5; 2; 3; 4; 5;

б) значения x, при которых значения y равны: 0,5; 1; 2;

в) целые значения x, при которых значения функции меньше 3.

492. Постройте графики функций $y = \sqrt{x}$ и $y = x^2$ при $x \geqslant 0$ в одной системе координат. Симметричны ли эти графики? Относительно какой прямой?

493. Решите графически уравнение:

а) $x^2 - \frac{1}{x} = 0$; б) $x^2 + \frac{8}{x} = 0$;

в) $\sqrt{x} - \frac{1}{x} = 0$; г) $\sqrt{x} + 2 = x$;

д) $x + \sqrt{x} = 6$; е) $x^2 - \sqrt{x} = 0$.

494. Имеет ли решения уравнение:

а) $x^2 = x - 2$; б) $\sqrt{x} = x + 3$; в) $x + \frac{1}{x} = 1$;

г) $x + \frac{1}{x} + 1 = 0$; д) $x + \sqrt{x} + 1 = 0$; е) $\sqrt{x} = 0{,}5x - 4$?

495*. Постройте график функции:

а) $y = x^2 + 3$; б) $y = \sqrt{x} + 3$; в) $y = \sqrt{x} - 3$.

496*. Сколько корней имеет уравнение:

а) $\sqrt{x} = 0{,}5x + 2$; б) $\sqrt{x} = \frac{1}{3}(x + 2)$; в) $\frac{1}{x} = x^2 - 2{,}5$?

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Вариант 1

1. Постройте график функции $y = 3 - 0{,}5x$.

2. Решите графически уравнение $\sqrt{x} = \frac{8}{x}$.

3. Теплоход за два часа прошел 40 км по течению реки и 32 км против течения. Найдите собственную скорость теплохода, если скорость течения реки 4 км/ч.

Вариант 2

1. Постройте график функции $y = 1 - 2x$.

2. Решите графически уравнение $x^2 = \frac{8}{x}$.

3. Теплоход за три часа прошел 60 км по течению

реки и 48 км против течения. Найдите скорость течения реки, если собственная скорость теплохода 36 км/ч.

Вариант 3

1. Постройте график функции $y = \frac{4}{x}$.

2. Решите графически уравнение $\sqrt{x} = x - 2$.

3. Мотоциклист первые 120 км пути ехал со скоростью на 3 км/ч большей, чем последующие 57 км. Какова первоначальная скорость мотоциклиста, если в дороге он был 3 ч?

Вариант 4

1. Постройте график функции $y = \frac{6}{x}$.

2. Решите графически уравнение $\sqrt{x} = 6 - x$.

3. Мотоциклист первые 80 км пути ехал со скоростью на 3 км/ч меньшей, чем последующие 42 км. С какой скоростью он ехал сначала, если в дороге он был 2 ч?

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ (ИТОГОВОЙ)

Вариант 1

1. Упростите выражение

$$\frac{4ac}{c-a} \cdot \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right) - (2 - \sqrt{c})(2 + \sqrt{c}).$$

2. Постройте график функции $y = 3 - 0{,}5x$. Найдите координаты точек пересечения графика с осями координат.

3. Решите уравнение

$$\frac{x^2}{2x - 16} + \frac{48 - 2x}{8 - x} = 6.$$

4. Расстояние 240 км пассажирский поезд проходит на час быстрее, чем товарный. Найдите скорость пассажирского поезда, если она на 20 км/ч больше скорости товарного.

Вариант 2

1. Упростите выражение

$$\frac{a^2 - 9}{a} : \left(1 - \frac{3}{a}\right) - (\sqrt{2} - 1)^2.$$

2. Постройте график функции $y = 2(x - 3)$. Найдите координаты точек, в которых этот график пересекается с осями координат.

3. Решите уравнение

$$\frac{x^2}{15(x-10)} + \frac{30-x}{30-3x} = 1.$$

4. С одного поля собрали 450 т, а со второго 400 т картофеля. Найдите урожайность каждого поля, если на втором поле она на 2 т выше, а площадь этого поля на 5 га меньше площади первого.

Вариант 3

1. Упростите выражение

$$\frac{0{,}5x - c}{cx} : \left(\frac{1}{c} - \frac{2}{x}\right) - \frac{1}{2+\sqrt{2}}.$$

2. Постройте график функции $y = 0{,}5(4 - x)$. Найдите координаты точек, в которых этот график пересекается с осями координат.

3. Решите уравнение

$$\frac{x^2}{4x-16} + \frac{12-x}{2(4-x)} = 1{,}5.$$

4. Фабрика за несколько дней обязалась изготовить 5400 пар обуви. Изготавливала же она ежедневно на 30 пар больше, поэтому заказ выполнила на 9 дней раньше. За сколько дней фабрика выполнила заказ?

Вариант 4

1. Упростите выражение

$$\frac{0{,}5x - 1}{x^2} : \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right)^2.$$

2. Постройте график функции $y = \frac{6-x}{2}$. Найдите координаты точек, в которых этот график пересекается с осями координат.

3. Решите уравнение

$$\frac{x^2}{3x-18} + \frac{18-x}{6-x} = 3.$$

4. Две бригады, работая вместе, расчистили лес за 6 дней. За сколько дней всю эту работу выполнила бы

каждая бригада отдельно, если первой бригаде на это нужно на 5 дней меньше, чем второй?

Задачи повышенной трудности

497. Сократите дробь:

а) $\frac{203203203}{405405405}$; б) $\frac{342+127\cdot 341}{342\cdot 127+215}$; в) $\frac{999999}{1002001}$.

498. Какое число больше:

а) $\frac{35+17}{35+18}$ или $\frac{35^3+17^3}{35^3+18^3}$; б) $\frac{10^9+1}{10^{10}+1}$ или $\frac{10^{10}+1}{10^{11}+1}$?

499. Докажите тождество:

$$\frac{a+b}{a+(a-b)}=\frac{a^3+b^3}{a^3+(a-b)^3}.$$

500. Вычислите сумму 999 дробей:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{999\cdot 1000}.$$

501. Сократите дробь:

а) $\frac{x^4+a^2x^2+a^4}{x^3+a^3}$; б) $\frac{8x^4+x}{16x^6+4x^4+x^2}$; в) $\frac{a^4+4}{a^3+2a+2}$.

502. Упростите выражение:

а) $\left(c+\frac{1}{c}\right)\left(c^2+\frac{1}{c^2}\right)\left(c^4+\frac{1}{c^4}\right)\left(c^8+\frac{1}{c^8}\right)$;

б) $\frac{1}{a-b}+\frac{1}{a+b}+\frac{2a}{a^2+b^2}+\frac{4a^3}{a^4+b^4}$;

в) $\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-c)(b-a)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}$;

г) $\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)}$.

503. Докажите, что сумма дробей $\frac{a-b}{1+ab}$, $\frac{b-c}{1+bc}$, $\frac{c-a}{1+ca}$ тождественно равна их произведению.

504. Докажите тождество Эйлера:

$$a^3+b^3+\left(\frac{2a^3b+b^4}{a^3-b^3}\right)^3=\left(\frac{a^4+2ab^3}{a^3-b^3}\right)^3.$$

Существуют ли такие натуральные числа x, y, z и t, что

$$x^3 + y^3 + z^3 = t^3?$$

505. Рациональное или иррациональное число $\sqrt{6 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{5}$?

506. Докажите, что число $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$ натуральное.

507. Чему равны $\sqrt{1156}$, $\sqrt{111556}$, $\sqrt{11115556}$? Попробуйте обобщить задачу.

508. Что больше: $\sqrt{1997} - \sqrt{1996}$ или $\sqrt{1998} - \sqrt{1997}$?

509. Вычислите:

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{9999}+\sqrt{10000}}.$$

510. Докажите, что $\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}}}} < 3$.

511. Решите уравнение:

а) $1992x^2 + 1995x + 3 = 0$;

б) $1994x^2 - 1992x - 2 = 0$;

в) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$;

г) $(x - 1)^4 - 5(x - 1)^2 + 4 = 0$;

д) $(x + 4)(x + 5)(x + 7)(x + 8) = 4$;

е) $(x^2 - 2x - 1)^2 + (3x^2 - 6x - 13) = 0$;

ё) $2 - \sqrt{x} = \sqrt{2 - x}$;

ж) $x^2 + \sqrt{5} = \sqrt{14 + 6\sqrt{5}}$.

512. Докажите, что корни уравнения $ax^2 + bx + a = 0$ обратны один другому.

513. При каком значении m разность корней уравнения $x^2 + mx + 1 = 0$ равна 1?

514. При каком значении m сумма квадратов корней уравнения $x^2 - 5mx + 4m^2 = 0$ равна 68?

515. При каком значении m один из корней уравнения $x^2 - 12x + 9m^2 = 0$ является квадратом второго корня?

516. При каком значении m сумма квадратов корней

уравнения $x^2 + mx + m - 2 = 0$ наименьшая? Чему равна эта сумма?

517. Докажите, что корни уравнения $x^2 + px + q = 0$ не могут быть рациональными числами, если p и q — целые нечетные числа.

518. Катер, скорость которого в стоячей воде 18 км/ч, отошел от пристани и, пройдя 36 км, догнал плот, отправившийся от той же пристани на 10 ч раньше катера. Найдите скорость течения реки.

519. Два автомобиля вышли одновременно из городов A и B навстречу друг другу. Через час они встретились и, не останавливаясь, продолжали ехать с той же скоростью. Первый из них прибыл в B на 27 мин позже, чем второй в A. Найдите скорость автомобилей, если $AB = 90$ км.

520. Два мотоциклиста выехали одновременно из городов A и B. Первый прибыл в B через 2,5 ч после встречи, а второй в A — через 1,6 ч после встречи. Сколько часов был в дороге каждый мотоциклист?

521. Из A в B выехали одновременно два автомобиля и встретились через 3 ч. Найдите отношение их скоростей, если первый автомобиль прибыл в B на 1,1 ч позже, чем второй в A.

522. Плывя против течения реки, возле высокой вербы юноша потерял пустую флягу. Через 20 мин он заметил потерю и вернулся, чтобы догнать флягу. Догнал он ее возле пристани. Найдите скорость течения реки, если расстояние от пристани до высокой вербы 2 км (рис. 59).

523. Расстояние между пристанями A и B лодка обычно проходит за 5 ч, а от B до A — за 6 ч. Как-то одновременно с лодкой от A отправился и плот. Дойдя до B и постояв там час, лодка отправилась обратно и встретилась с плотом на расстоянии 22 км от A. Найдите расстояние от A до B.

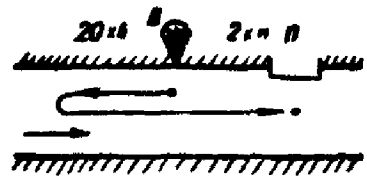


Рис. 59

524. Задача с неожиданным ответом. Автомобиль проехал от A до B со ско-

ростью 60 км/ч, а из B до A — со скоростью 70 км/ч. Найдите его среднюю скорость.

525. В 10 ч из N в M и из M в N вышли ученик и спортсмен и пошли навстречу друг другу. После встречи спортсмен полчаса шел до N. В котором часу он пришел, если ученик шел на час дольше?

526. Квадратный корень из числа меньше этого числа на сто десять. Кто из сообразительных верно и быстро отыщет этот корень?

527. Население города за два года увеличилось с 20000 до 22050 человек. Найдите ежегодный средний процент прироста населения этого города.

528. Старинная китайская задача. Два человека одновременно вышли из одного города: B на восток, а A, пройдя 10 бу на юг, повернул на северо-восток к B. Какое расстояние прошел каждый из них, если за час A проходил 7 бу, а B — только 3 бу?

529. Задача Безу. Некто купил коня и через некоторое время продал его за 24 пистоля. При этом он потерял столько процентов, сколько стоил ему конь. За сколько пистолей он купил коня?

530. Задача Эйлера. Найдите число, четвертая степень которого, разделенная на половину искомого числа и увеличенная на $14\frac{1}{4}$, равна 100.

531. Решите уравнение из работ известных математиков:

а) $\frac{1}{x^2} + 2 \cdot \frac{1}{x} = 1\frac{1}{4}$ *(Хайям)*;

б) $x^4 - 2x^2 - 400x = 9999$ *(Бхаскара)*;

в) $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$ *(Декарт)*.

532. Задача Бхаскара. Докажите, что

$$\sqrt{10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60}} = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}.$$

533. Найдите двузначное число, вдвое больше произведения его цифр.

534. Произведение числа на число, записанное теми же цифрами в обратном порядке, равно 2430. Найдите это число.

535. Найдите двузначное число, отношение которого к числу, записанному теми же цифрами в обратном порядке, равно 0,375.

536. Постройте график функции:

а) $y = |x|$; б) $y = |x - 2|$.

537. Решите уравнение:

а) $\sqrt{x} - |x| = 0$; б) $x^3 + |x| = 0$.

538. Докажите, что в числовом значении выражения $(8 + \sqrt{65})^3$ первые три десятичных знака после запятой — нули.

539. Замените буквы цифрами, чтобы выполнялись равенства:

а) $алгебра = лев^е$; б) $алгебра = лиг^а$;

в) $алгебра = бан^к$; г) $алгебра = х^е$.

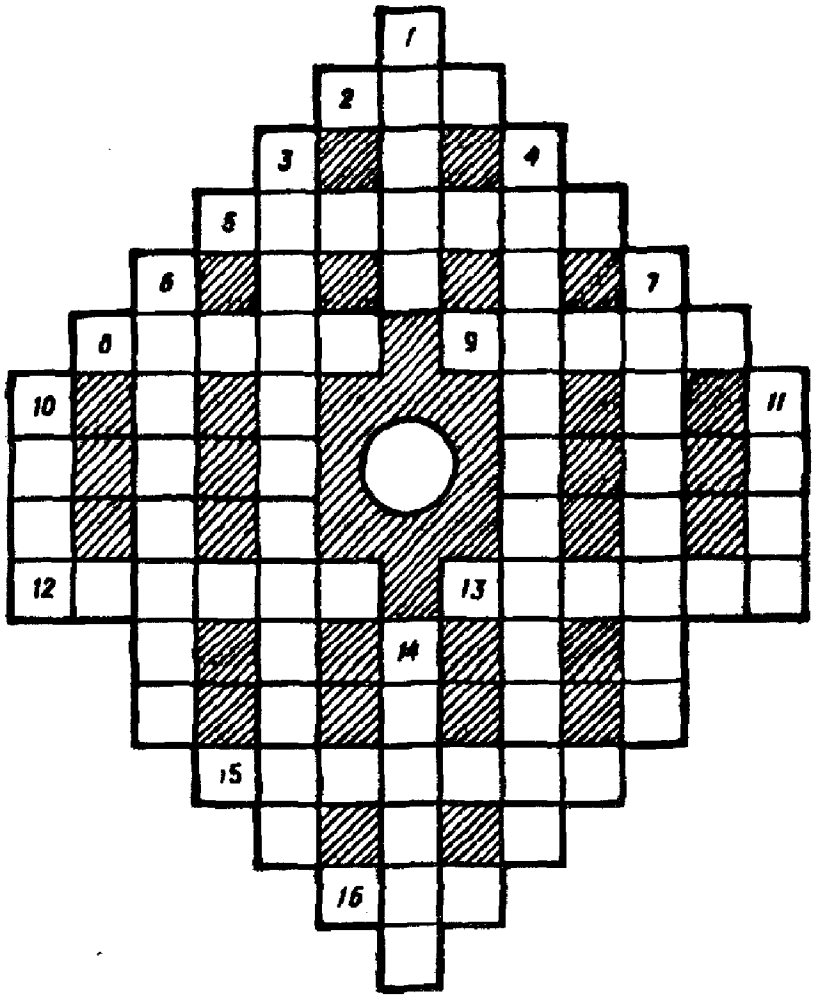


Рис. 60

540. Решите кроссворд (рис. 60).

По горизонтали: 2. Единица времени. 5. Арифметическое действие. 8. Известный персидский математик и поэт 12 в. 9. Размер заработной платы. 12. Разговор. 13. Географическая координата. 15. Произведение равных множителей. 16. Единичный вектор.

По вертикали: 1. Древнегреческий математик. 3. Восьмое простое число. 4. Выражение $b^2 - 4ac$ для уравнения $ax^2 + bx + c = 0$. 6. Результат вычитания. 7. График квадратичной функции. 10. Часть угломерного инструмента в виде диска со шкалой. 11. Греческая буква. 14. Денежный знак.

Контрольные вопросы

1. Что значит разделить одно выражение на другое?
2. Сформулируйте правило деления степеней.
3. Сформулируйте правило деления одночленов.
4. Что понимают под степенью с нулевым показателем?
5. Сформулируйте определение дроби. Назовите члены дроби.
6. Что такое допустимые значения переменных?
7. Какие выражения называют тождественными, тождественно равными?
8. Что такое тождество, тождественное преобразование выражений?
9. Сформулируйте основное свойство дроби.
10. Сформулируйте правило умножения дробей, деления дробей.
11. Как возводят дроби в степень?
12. Какие выражения называют дробными, рациональными?
13. Какие уравнения называют дробными, рациональными?
14. При каком условии значение дроби равно нулю?
15. Сформулируйте теоремы о корне из произведения, дроби, степени.

16. Как выносят множители за знаки корней?

17. Как освобождают дроби от иррациональности в знаменателе?

18. Сформулируйте определение квадратного уравнения.

19. Что такое дискриминант квадратного уравнения?

20. По какой формуле решают квадратные уравнения?

21. Сформулируйте теорему Виета, обратную теорему.

22. Что такое функция?

23. Что такое аргумент функции, область определения функции?

24. Что такое график функции?

25. Как можно задавать функции?

26. Какие функции называют линейными?

27. Что такое прямая пропорциональность, обратная пропорциональность?

28. Что является графиком линейной функции?

29. Как называются графики функций $y = x^2$, $y = \frac{k}{x}$?

9 КЛАСС

Глава IX
НЕРАВЕНСТВА

§ 48. *Общие сведения*

Если число a меньше или больше числа b, то записывают соответственно $a < b$ или $a > b$. Например, $3 < 5$, $-7 > -13$.

Смысл соотношений «больше» и «меньше» можно раскрыть таким определением. ***Число a считается больше b, если разность a − b — число положительное; число a меньше b, если разность a − b — число отрицательное.***

Поскольку разность $a - b$ может быть положительной, отрицательной или равняться нулю, то для каких-либо действительных чисел a и b выполняется одно и только одно из трех соотношений: $a > b$, $a < b$ или $a = b$.

Пользуясь сформулированным выше определением, можно сравнивать числа, т. е. устанавливать, какое из них больше, а какое меньше. Например, чтобы сравнить дроби $\frac{4}{9}$ и $\frac{11}{25}$, найдем их разность:

$$\frac{4}{9} - \frac{11}{25} = \frac{4 \cdot 25 - 11 \cdot 9}{9 \cdot 25} = \frac{1}{9 \cdot 25}.$$

Разность данных дробей — число положительное, поэтому $\frac{4}{9} > \frac{11}{25}$.

На координатной прямой меньшему числу соответствует точка, лежащая левее точки, соответствующей большему числу. Например, рисунок 61 соответствует соотношениям $c < a$, $a < b$ и $c < b$.

Кроме знаков $<$ и $>$ часто используют также знаки:

$\leqslant$ — меньше или равно (не больше),

$\geqslant$ — больше или равно (не меньше).

Рис. 61

Например, можно утверждать, что $2 \leqslant 5$, $4 \geqslant 4$, $-\frac{1}{2} \leqslant -0{,}5$.

Знаки $<$ и $>$ называют знаками *строгого неравенства*. Они противоположны друг другу: если $a < b$, то $b > a$ и наоборот. Знаки $\leqslant$ и $\geqslant$ также противоположны друг другу, их называют знаками *нестрогого неравенства*. Какой-либо из знаков $<$, $>$, $\leqslant$ и $\geqslant$ называют *знаком неравенства*.

Два выражения, соединенные знаком неравенства, образуют *неравенство*. Примеры неравенств: $3 < \sqrt{10}$, $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$, $3x - 5 > 0$.

Выражение, стоящее слева или справа от знака неравенства, называется соответственно левой и правой частью неравенства. Например, левой частью неравенства $5x + 4 < 8$ является выражение $5x + 4$, а правой — число 8 (любое число также является выражением).

Если обе части неравенства — числа, его называют *числовым неравенством*. Такие неравенства бывают верные и неверные. Например, из неравенств $2 < 3$, $\sqrt{2} \geqslant 1$, $-3 < -5$ два первых верные, а третье — неверное, т. к. число -3 больше -5.

Неравенство с переменными при одних значениях переменных может быть верным, а при других — неверным. Например, неравенство $2x + 3 > 5$, если x равен 2, 3, 4, 5, верно, а если x равен 1, 0, -1, -2, неверно. Говорят, что значения 2, 3, 4, 5 данному неравенству удовлетворяют, а 1, 0, -1, -2 не удовлетворяют.

1. Какое из чисел a и b больше, если:

а) $a - b = 0{,}01$; б) $a - b = -3{,}7$; в) $a = 2{,}3 + b$?

2. Сравните числа m и n, если $n - m = 327$.

3. Сравните числа x и y, если $y - x = -0{,}001$.

4. Какие неравенства верны:

а) $-7 > -5$; б) $4{,}3 \geqslant -3{,}4$; в) $\sqrt{5} \leqslant \pi$?

Рис. 62

5. Точки с координатами a, b, c расположены на координатной прямой, как показано на рисунке 62. Какое из чисел a, b, c наибольшее, какое наименьшее? Верны ли неравенства:

а) $a < b$; б) $b < c$; в) $c < a$?

6. Сравните числа:

а) $\frac{10}{11}$ и $\frac{19}{20}$; б) $\frac{28}{29}$ и $\frac{29}{30}$; в) $\frac{48}{49}$ и 0,98.

7. Запишите в порядке возрастания числа: 2, $\sqrt{5}$, -12, $2\frac{1}{2}$, 0, -3π.

8. Какое из чисел $1{,}5$, $1\frac{29}{50}$, $\frac{\pi}{2}$, $\sqrt{10} : 2$, $\sqrt{7} \cdot 0{,}5$ наибольшее?

9. Сравните значения выражений $2x + 3$ и $3x + 2$ при $x = 7$.

10. Сравните значения функции $y = 2x - 1$ при $x = 1$ и $x = 2$.

11. Сравните значения функции $y = x^2$ при $x = -20$ и $x = 20$.

12. Докажите, что $10^{11} - 10^{10} > 10^{10} + 10^9$.

13. Верно ли неравенство $3x - 2 < 7$ при:

а) $x = 4$; б) $x = 3$; в) $x = 2$; г) $x = 0$?

14. При всех ли действительных значениях c верно неравенство:

а) $c^2 + 3 > 0$; б) $(c + 2)^2 > 0$; в) $(c - 1)^2 \geqslant 0$?

15. Докажите, что при любом значении n:

а) $n^4 + 1 > 0$; б) $(n - 5)^2 \geqslant 0$; в) $n^2 - 2n + 1 \geqslant 0$.

16. Подберите несколько значений переменной x, удовлетворяющих неравенству:

а) $2x + 3 < 0$; б) $3 - x^2 > 0$; в) $x + \frac{1}{x} < 1$.

§ 49. Свойства числовых неравенств

Здесь будем рассматривать неравенства вида $a < b$, $c > d$ и др., где a, b, c, d — произвольные действительные числа.

Теорема 1. ***Если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$.***

Доказательство. Если $a < b$ и $b < c$, то числа $a - b$ и $b - c$ — отрицательные. Их сумма $(a - b) + (b - c) = a - c$ — число также отрицательное. А если $a - c$ — число отрицательное, то $a < c$. Это и требовалось доказать.

Пример. Поскольку $\sqrt{1,9} < \sqrt{2}$ и $\sqrt{2} < 1,42$, то $\sqrt{1,9} < 1,42$.

Теорема 2. ***Если к обеим частям верного неравенства прибавить одно и то же число, то получится верное неравенство.***

Например, если $a < b$ и c – какое-нибудь число, то $a + c < b + c$.

Доказательство. Если $a < b$, то $a - b$ — число отрицательное. Поскольку $a - b = (a + c) - (b + c)$, то разность $(a + c) - (b + c)$ — число также отрицательное. А это значит, что $a + c < b + c$.

Теорема 3. ***Если обе части верного неравенства умножить на одно и то же положительное число, то получится верное неравенство. Если обе части верного неравенства умножить на одно и то же отрицательное число и заменить знак неравенства на противоположный, то получится верное неравенство.***

Доказательство. Пусть $a < b$ и c — какое-нибудь положительное число. В этом случае числа $a - b$, $(a - b)c$, а следовательно, и разность $ac - bc$ — отрицательные, т. е. $ac < bc$.

Если $a < b$ и c — какое-нибудь отрицательное число, то произведение $(a - b)c$, а следовательно, и разность $ac - bc$ — числа положительные. Поэтому $ac > bc$.

Примеры. $3 < 4$ и $5 > 0$, поэтому $3 \cdot 5 < 4 \cdot 5$; $3 < 4$ и $-2 < 0$, поэтому $3 \cdot (-2) > 4 \cdot (-2)$.

Поскольку деление можно заменить умножением на число, обратное делителю, то в теореме 3 слово «умножить» можно заменить словом «разделить». Если $a < b$ и $c > 0$, то $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$; если $a < b$ и $c < 0$, то $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.

Теорема 4. ***Неравенства с одинаковыми знаками можно почленно складывать. Например, если $a < b$ и $c < d$, то $a + c < b + d$.***

Доказательство. Если $a < b$ и $c < d$, то по теореме 2 $a + c < b + c$ и $b + c < b + d$, откуда

$$a + c < b + d.$$

Примеры. $2 < 3$ и $5 < 7$, поэтому $2 + 5 < 3 + 7$; $6 \geqslant 4$ и $-2 \geqslant -2$, поэтому $6 - 2 \geqslant 4 - 2$.

Теорема 5. ***Неравенства с одинаковыми знаками можно почленно перемножать, если их левые и правые части — положительные числа. Например, если $a < b$, $c < d$ и числа a, b, c, d — положительные, то $ac < bd$.***

Доказательство. Пусть $a < b$ и $c < d$, а числа c и b — положительные. Согласно теореме 3 $ac < bc$ и $bc < bd$, откуда по теореме 1 $ac < bd$.

Примечание. Теоремы 4 и 5 верны также для трех и произвольного числа неравенств. Например, если $a < b$, $c < d$ и $n < m$, то $a + c + n < b + d + m$.

Доказательства теорем 1—5 для неравенств со знаком $<$ почти дословно можно повторить для аналогичных неравенств со знаком $>$.

17. Сравните числа x и z, если:

а) $x < y$ и $y < z$; б) $x > y$ и $y > z$; в) $x \leqslant a$ и $a \leqslant z$.

18. Сравните числа a и b, если:

а) разности $a - c$ и $c - b$ — положительные числа;

б) разности $b - c$ и $c - a$ — отрицательные числа;

в) разности $a - n$ и $n - b$ — неотрицательные числа.

19. Сравните числа a и b, если:

а) $a - c > 0$ и $b - c < 0$;

б) $a - x \leqslant 0$ и $x - b \leqslant 0$.

20. Покажите, как расположены на координатной прямой точки с координатами a, b, c и d, если $a < c$, $b > c$, $d > b$.

21. Запишите верное неравенство, полученное в результате:

а) прибавления к обеим частям неравенства $12 < 18$ числа 5;

б) вычитания из обеих частей неравенства $12 < 18$ числа 77;

в) умножения обеих частей неравенства $12 < 18$ на 3; на -5;

г) деления обеих частей неравенства $12 < 18$ на 3; на -6.

22. Умножьте обе части неравенства $a > b$ на $\frac{2}{3}$; на $-\frac{5}{7}$.

23. Известно, что $a > b$. Поставьте вместо * знак неравенства:

а) $2a * 2b$; б) $1{,}5a * 1{,}5b$;

в) $-a * -b$; г) $-3a * -3b$;

д) $-\frac{1}{2}a * -\frac{1}{2}b$; е) $\sqrt{2}a * \sqrt{2}b$.

24. Положительное или отрицательное число a, если:

а) $2a < 3a$; б) $0{,}5a > a$; в) $-5a < -4a$?

25. Сложите почленно неравенства:

а) $5 < 12$ и $7 < 8$; б) $3 < 6$ и $-3 < -2$;

в) $5 < 6$ и $x < x$; г) $a < b$ и $x \leqslant z$.

26. Перемножьте почленно неравенства:

а) $2 < 3$ и $5 < 8$; б) $5 < 7$ и $\frac{1}{7} < \frac{1}{5}$;

в) $\frac{1}{4} < \frac{1}{3}$ и $\frac{2}{5} < \frac{3}{5}$; г) $-4 < -1$ и $-5 < -4$.

27. Докажите, что если $a < b$ и $ab < 0$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

28. Сравните положительные числа $\frac{c}{a}$ и $\frac{c}{b}$ при $a < b$ и $c > 0$.

29. Запишите в порядке возрастания числа $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{d}$, если все они положительные и $a < c$, $d < b$ и $d > c$.

30. Запишите в порядке возрастания числа $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{d}$, если все они отрицательные и $a > c$, $d > b$ и $d < c$.

31. Докажите, что если:

а) $a \leqslant b$ и $b \leqslant c$, то $a \leqslant c$;

б) $a \leqslant b$ и $c > 0$, то $ac \leqslant bc$;

в) $a \leqslant b$ и $c < 0$, то $ac \geqslant bc$.

32. Верно ли, что при положительных значениях a и b:

а) из $a < b$ следует $a^2 < b^2$;

б) из $a^2 < b^2$ следует $a < b$;

в) из $a < b$ следует $\sqrt{a} < \sqrt{b}$;

г) из $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ следует $a < b$?

33. Известно, что $10 < x < 12$. Какие значения может принимать выражение:

а) $2x$; б) x^2; в) $3x - 5$; г) $\frac{2}{x}$?

34. Известно, что $3 < x < 4$ и $12 < y < 13$. Какие значения может принимать выражение:

а) $x + y$; б) xy; в) $y - x$; г) $\frac{y}{x^2}$?

§ 50. Решение неравенств с одной переменной

Как известно из предыдущих классов, равенства с переменными бывают двух видов: тождества и уравнения. Тождества доказывают, уравнения решают. Аналогично рассматривают два вида неравенств с переменными: *тождественные неравенства* и *неравенства*

с неизвестными. Тождественные неравенства доказывают (см. § 52), а неравенство с неизвестными решают.

Рассмотрим неравенство $5x - 2 > 8$ с одним неизвестным x. Если вместо x подставим число 1, получим неверное числовое неравенство $5 - 2 > 8$. Говорят, что значение $x = 1$ данному неравенству не удовлетворяет. Если вместо x подставим число 3, получим верное числовое неравенство $5 \cdot 3 - 2 > 8$. Значение $x = 3$ данному неравенству удовлетворяет, число 3 — решение неравенства $5x - 2 > 8$.

Решением неравенства с одной переменной называется значение этой переменной, удовлетворяющее данному неравенству.

Решить неравенство — это значит найти все его решения или показать, что их нет.

Решают неравенство, заменяя его другими неравенствами, более простыми и равносильными ему.

Два неравенства называют *равносильными*, если они имеют одни и те же решения, т. е. если каждое решение первого неравенства удовлетворяет второму, а каждое решение второго неравенства удовлетворяет первому. Например, неравенство $5x - 2 > 8$ равносильно каждому из неравенств $5x > 2 + 8$, $5x > 10$, $x > 2$.

Неравенства с переменными имеют свойства, аналогичные свойствам уравнений.

1. ***Если из одной части неравенства перенесем в другую слагаемое с противоположным знаком, то получим неравенство, равносильное данному.***

2. ***Если обе части неравенства умножим или разделим на одно и то же положительное число, то получим неравенство, равносильное данному.***

3. ***Если обе части неравенства умножим или разделим на одно и то же отрицательное число, заменив при этом знак неравенства на противоположный, то получим неравенство, равносильное данному.***

Эти свойства неравенств с неизвестными следуют из теорем, доказанных в § 49. Используя эти свойства, неравенства с неизвестными можно решать, как уравнения.

Пример 1. Решите неравенство $5x < 2x + 15$.

Р е ш е н и е. Перенесем слагаемое $2x$ в левую часть неравенства:

$$5x - 2x < 15.$$

Приведем подобные члены:

$$3x < 15.$$

Разделим обе части неравенства на 3:

$$x < 5.$$

О т в е т. Неравенству удовлетворяет каждое действительное число, меньше 5.

Пример 2. Решите неравенство $7(2 - x) \leqslant 3x + 44$.

Р е ш е н и е. $14 - 7x \leqslant 3x + 44,$

$$-7x - 3x \leqslant -14 + 44,$$

$$-10x \leqslant 30,$$

$$x \geqslant -3.$$

О т в е т. Неравенству удовлетворяет каждое число, не меньше -3.

П р и м е ч а н и е. Множество решений неравенств удобно записывать в виде *промежутков*. Множество всех действительных чисел, меньших 5, называют промежутком от минус бесконечности до 5 и обозначают $(-\infty; 5)$. На рисунке 63 этот промежуток отмечен штриховкой. Множество всех действительных чисел, не меньших -3, называют промежутком от -3 до бесконечности, включая -3. Обозначают его $[-3; \infty)$, наглядно изображают, как показано на рисунке 64. Следовательно, ответы к решенным неравенствам можно записать и с помощью промежутков: $(-\infty; 5)$, $[-3; \infty)$.

35. Является ли число 8 решением неравенства $5x - 4 > 30$?

36. Какие из чисел 0, 1, 2, 3, 4, 5 удовлетворяют неравенству:

а) $2x - 5 > 0$; б) $4x + 1 \leqslant 13$; в) $3x + 4 \geqslant 5$?

Рис. 63

Рис. 64

37. Изобразите в виде промежутков и на координатной прямой множества чисел, удовлетворяющих неравенству:

а) $x < 4$; б) $x > -1$; в) $x \leqslant 0{,}5$.

Решите неравенства и изобразите множества их решений на координатной прямой 38—45.

38. а) $x + 2 > 5$; б) $x - 4 > 0$;

в) $2 + x \geqslant 3$.

39. а) $3x > 15$; б) $4y < 36$;

в) $5z \geqslant 35$.

40. а) $0{,}2x < 1$; б) $2{,}5x \geqslant 5$;

в) $0{,}3z \leqslant 1$.

41. а) $\frac{2}{3}z > 8$; б) $\frac{4}{5}x \leqslant 16$;

в) $\frac{7}{8}y > 14$.

42. а) $-x < 5$; б) $-z > -4$;

в) $-x < 0$.

43. а) $-5x \leqslant 15$; б) $-3x > -3$;

в) $-5z \leqslant -1$.

44. а) $3x + 2 < 5$; б) $7x - 4 \geqslant 8$;

в) $9x + 5 > 5$.

45. а) $5x - 4 < 3x$; б) $6z + 1 > 2z$;

в) $y + 5 < 2y$.

46. Решите неравенство $2x + 3 < 2(x + 3)$.

Р е ш е н и е. $2x + 3 < 2x + 6$,

$2x - 2x < 6 - 3$,

$0x < 3$.

Неравенство $0x < 3$ верно при любом значении x.

О т в е т. $(-\infty; \infty)$.

47. Решите неравенство $6z + 7 \geqslant 2(3z + 4)$.

Решение. $6z + 7 \geqslant 6z + 8$,

$$6z - 6z \geqslant 8 - 7,$$

$$0z \geqslant 1.$$

Неравенству $0z \geqslant 1$ не удовлетворяет ни одно значение z.

Ответ. Решений нет.

Решите неравенства 48—71.

48. а) $8x - 3 > 5x + 6$; б) $7y - 13 < 5y - 9$.

49. а) $2x - 3 \leqslant 3x - 8$; б) $x - 15 \geqslant 4x + 3$.

50. а) $3 + x > 2x - 3$; б) $5 - 2y < y + 8$.

51. а) $17 \leqslant 4 - 3x$; б) $24 \geqslant 15 + 3z$.

52. а) $3 - 5x > 4 - 5x$; б) $8 + 6z \leqslant 13 + 6z$.

53. а) $8 - 3(x - 2) > 4x$;

б) $5y < 12 - 4(y + 5)$.

54. а) $0{,}5x - 4(x - 3) > 3x$;

б) $6x < 0{,}2x - 2(x + 3)$.

55. а) $0 < y - 0{,}3(2 - y)$;

б) $4 \geqslant 5z - 0{,}2(1 - z)$.

56. а) $0{,}3 \leqslant 1{,}2 + 0{,}5(x - 2)$;

б) $0 < 4{,}5 + 0{,}7(2y - 3)$.

57. а) $2{,}7(x + 3) < 7{,}2(x - 3)$;

б) $3{,}4(2x - 1) < -0{,}1(x + 2)$.

58. а) $\frac{1}{2}x + \frac{3}{4} < \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$; б) $\frac{2}{5}y - \frac{3}{4} > \frac{3}{4}y - \frac{2}{5}$.

59. а) $x - \frac{2}{5}(x - 3) > 0{,}4$;

б) $2y - \frac{1}{2} < 0{,}2(y + 3)$.

60. а) $3(x + 4) + 2(3x - 2) > 5x - 3(2x + 4)$;

б) $2x - 6 - 5(2 - x) \leqslant 12 - 5(1 - x)$.

61. а) $x + 2 < 5(2x + 8) + 13(4 - x) - 3(x - 2)$;

б) $y + 7 > 4(2 - y) - 12(4 - 2y) + 17(y - 1)$.

62. а) $0{,}2\,(x-2)-0{,}3\,(3-x)\geqslant 0{,}4\,(2x-1)-$
$-\,0{,}5\,(x-1)$;

б) $2{,}5\,(2-z)-3{,}5\,(z-1)\leqslant 2{,}5\,(z+2)-1{,}5\,(2-z)$.

63. а) $\frac{3x}{5}>2$; б) $\frac{4x}{7}<4$; в) $\frac{2x}{3}<-4$.

64. а) $1<\frac{4z}{81}$; б) $-5\geqslant\frac{3x}{7}$; в) $0\geqslant\frac{17x}{5}$.

65. а) $\frac{6x+1}{2}>3$; б) $\frac{4x-11}{5}\leqslant 0$;

в) $\frac{3}{5}\,(x-4)>12$.

66. а) $\frac{x}{2}+\frac{x}{4}>6$; б) $\frac{3x}{2}-\frac{x}{3}>2$;

в) $x+\frac{x}{2}\geqslant 15$.

67. а) $\frac{12c-1}{2}<4c$; б) $\frac{5-2a}{4}\geqslant 2a$;

в) $\frac{4+0{,}5x}{2}<1{,}5$.

68. а) $\frac{2+x}{3}-\frac{3-x}{2}>0$; б) $\frac{3-k}{4}-\frac{k+2}{5}>2$.

69. а) $x-\frac{3+2x}{2}>\frac{1-x}{4}$;

б) $\frac{a-1}{2}-\frac{2a+3}{8}>2+a$.

70. а) $\frac{c-0{,}5}{2}+\frac{c+0{,}5}{4}>\frac{c-1}{8}$;

б) $\frac{x-0{,}3}{3}-\frac{x-0{,}6}{6}\leqslant\frac{x+1}{12}$;

в) $\frac{x+2}{0{,}3}+\frac{2-x}{0{,}4}<\frac{x+4}{1{,}2}$;

г) $\frac{c-8}{0{,}5}-\frac{2-c}{1{,}5}\geqslant\frac{2c}{3}$.

71. а) $(x-4)^2<(x-2)\,(x+2)$;

б) $(2x-3)^2<4x^2$;

в) $(3x-1)^2\leqslant 9x\,(x-2)$;

г) $(3x-2)^2\geqslant(3x+2)^2$.

72. При каких значениях переменной имеет смысл выражение:

а) $\sqrt{3x-6}$; б) $\sqrt{4-x}$; в) $\sqrt{-(2-x)}$;

г) $\sqrt{0{,}5-0{,}3x}$; д) $\sqrt{1-5(x+3)}$; е) $x+\sqrt{2-x}$.

73. Какое наибольшее натуральное значение n удовлетворяет неравенству:

а) $18-3(n-15)>11n$;

б) $0{,}3(n-2)<1{,}2-0{,}5(n+2)$?

74. Какое наименьшее целое значение m удовлетворяет неравенству:

а) $3m+8(2m-1)>5m+35$;

б) $m^2+4m\leqslant(m+2)^2$?

75. Туристы должны возвратиться на базу не позже, чем через 3 ч. На какое расстояние они могут отплыть по течению реки на моторной лодке, собственная скорость которой 18 км/ч, а скорость течения реки 4 км/ч?

§ 51. Системы неравенств с одной переменной

Иногда возникает необходимость определить общие решения нескольких неравенств. Найдем, например, общие решения двух неравенств

$$2x-3<5 \text{ и } 2-3x<11,$$

т. е. найдем такие значения x, которые удовлетворяют как первому, так и второму неравенству. В таких случаях говорят о *системе неравенств*.

Систему неравенств, как и систему уравнений, записывают с помощью фигурной скобки:

$$\begin{cases}2x-3<5,\\2-3x<11.\end{cases}$$

Решением системы неравенств с одной переменной называется значение переменной, удовлетворяющее каждому неравенству данной системы.

Решить систему неравенств — это значит найти все ее решения или показать, что их нет.

Решим приведенную выше систему, постепенно заменяя каждое ее неравенство более простым и равносильным ему:

$$\begin{cases} 2x - 3 < 5, \\ 2 - 3x < 11; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x < 8, \\ -3x < 9; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 4, \\ x > -3. \end{cases}$$

Первому неравенству удовлетворяют все числа, меньше 4, а второму — все числа, больше -3 (рис. 65).

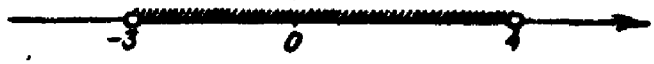


Рис. 65

Обоим неравенствам системы удовлетворяют такие значения x, что $-3 < x < 4$. Это множество значений x называют *числовым промежутком* от -3 до 4 и обозначают $(-3; 4)$. Числа -3 и 4 этому промежутку не принадлежат.

Примеры. Решите системы неравенств:

а) $\begin{cases} 3x - 1 > 14, \\ 2 - x < 8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - 1 > x + 3, \\ 5x - 1 < 6 - 2x; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 21 - 5x > 1, \\ 6x + 14 \geqslant 2. \end{cases}$

Р е ш е н и е.

а) $\begin{cases} 3x - 1 > 14, \\ 2 - x < 8; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x > 15, \\ -x < 6; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 5, \\ x > -6 \end{cases}$ (рис. 66).

Рис. 66

Обоим неравенствам удовлетворяют значения x, больше 5.

О т в е т. $(5; \infty)$.

б) $\begin{cases} 2x > x + 4, \\ 5x < 7 - 2x; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 4, \\ 7x < 7; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 4, \\ x < 1 \end{cases}$ (рис. 67).

Рис. 67

Не существует числа, которое одновременно меньше 1 и больше 4.

О т в е т. Решений нет.

в) $\begin{cases} 21 - 5x > 1, \\ 6x + 14 \geqslant 2; \end{cases}$ $\begin{cases} -5x > -20, \\ 6x \geqslant -12; \end{cases}$ $\begin{cases} x < 4, \\ x \geqslant -2 \end{cases}$ (рис. 68)

Рис. 68

Обоим неравенствам удовлетворяют значения x из числового промежутка $[-2; 4)$, т. е. такие значения x, для которых $-2 \leqslant x < 4$.

Ответ. $[-2; 4)$.

К системам неравенств приводит решение *двойных неравенств*. Например, двойное неравенство $-1 < 3x + 5 < 29$ равносильно системе:

$$\begin{cases} 3x + 5 > -1, \\ 3x + 5 < 29. \end{cases}$$

Ее множество решений $(-2; 8)$.

76. Является ли число 2 решением системы неравенств:

а) $\begin{cases} x - 3 < 5, \\ 4x + 2 > 9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x \geqslant x + 2, \\ 12 < 8x - 5; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 0{,}5x \geqslant 2x - 3, \\ 3x - 1 > 4? \end{cases}$

77. Какие из чисел -1, 0, 1, 2, 3 удовлетворяют системе неравенств:

$$\begin{cases} 2x + 3 > 5, \\ 1 - x < 0? \end{cases}$$

78. Изобразите на координатной прямой промежуток:

а) $(2; \infty)$; б) $[4; \infty)$; в) $(-\infty; 0)$;

г) $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$; д) $(2; 5)$; е) $[2; 5]$;

ё) $[-4; 0)$; ж) $(3; 7]$.

79. Запишите в виде промежутков и изобразите на координатной прямой множества чисел, удовлетворяющих двойному неравенству:

а) $3 < x < 5$; б) $-3 < x < -2$; в) $-1 \leqslant x \leqslant 4$;

г) $0 < y \leqslant 6$; д) $\frac{1}{3} < z < \frac{1}{2}$; е) $-\frac{2}{3} < c < 1$.

Решите системы неравенств 80—88.

80. а) $\begin{cases} 2x + 3 > x, \\ 4x - x < 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2 - 5x < 7, \\ 3x + 1 < -8; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 8 \leqslant 4x + 8, \\ 0 > 3x + 6. \end{cases}$

81. а) $\begin{cases} 5y - 1 < 2y, \\ 3 - 2y < y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4 - 3y \geqslant -2y, \\ y - 3 \geqslant 4; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 5y - 7 \leqslant 3y, \\ 2 - 4y < 5. \end{cases}$

82. а) $\begin{cases} 0{,}5z - 2 < z, \\ 0{,}3 - 2z > 3z; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 0{,}8x - 3 \geqslant 5, \\ 0{,}8x + 1 \geqslant 9; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 1 - 1{,}5x < x, \\ 1 + 1{,}5x < 16. \end{cases}$

83. а) $\begin{cases} \frac{x}{2} - 1 > \frac{x}{3}, \\ x - 1 < 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 6x + 1 < 4x, \\ \frac{x}{3} - \frac{x}{5} > 0{,}3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \frac{x-1}{2} < \frac{x-2}{3}, \\ 2x - 3 > 0. \end{cases}$

84. а) $\begin{cases} 3 - 2(x - 1) < 0, \\ 5 - 3(x - 4) > 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -4(2x - 1) < 3, \\ -5(x - 3) \geqslant 4; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x \leqslant 2 - 3(x + 1), \\ 5x \geqslant 3 + (x - 4). \end{cases}$

85. а) $\begin{cases} 2x - 0{,}2(x - 2) > 4, \\ \frac{x}{2} - 6 \leqslant \frac{x}{8}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4 - \frac{x-1}{3} \geqslant x, \\ 7x - 1 \geqslant 48. \end{cases}$

86. а) $\begin{cases} 3(3 + 2x) - 2(18 - x) < 7x, \\ 6(2 + x) > 9(9 + x) - 5x; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 8(1+x)-3(2x-1)>4, \\ 5<3x-2(8x-3). \end{cases}$

87. а) $\begin{cases} (x+1)^2>x^2+4, \\ (x-1)^2>x^2-4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} c^2-3<(c+3)^2, \\ 2c-c^2>(c-2)^2. \end{cases}$

88. а) $\begin{cases} (x-1)^2\geqslant x^2+7, \\ (x-2)^2\geqslant x^2-8; \end{cases}$

б) $\begin{cases} (z^2-2)\cdot 3\geqslant 3z^2-5, \\ z^2+2z\leqslant (z-1)(z+1). \end{cases}$

89. Найдите целые решения системы неравенств:

а) $\begin{cases} 2n+3<4(3n-5), \\ 8-4n<7-2(4n-13); \end{cases}$

б) $\begin{cases} n(n+1)>(n+2)(n-2), \\ (n-3)^2>3-n(2-n). \end{cases}$

90. Решите двойное неравенство:

а) $-2<3x-4<5$; б) $3<2-x<5$;

в) $0{,}4\leqslant 2x+1\leqslant 0{,}6$; г) $0{,}7\leqslant 3-2x\leqslant 1{,}2$;

д) $-1\leqslant\frac{1}{3}(6-z)<1$; е) $-2{,}5<\frac{1}{2}(1-3y)\leqslant 1{,}5$.

91. При каких значениях x числовое значение выражения $4x-5$ принадлежит промежутку:

а) $(-1;2)$; б) $[-2;0]$; в) $(-\infty;0)$; г) $[3;7)$?

92. При каких значениях c числовое значение выражения $\frac{2-3c}{4}$ принадлежит промежутку:

а) $(-\infty;0)$; б) $[0;\infty)$; в) $(-1;1)$; г) $[1;8]$?

93. Решите неравенство:

а) $(x-2)(x+5)<0$; б) $\frac{x-2}{x+5}<0$.

Р е ш е н и е. а) Произведение двух чисел отрицательно тогда, когда одно из этих чисел отрицательное, а второе положительное. Следовательно, решение данного неравенства сводится к решению двух систем неравенств:

$$\begin{cases} x - 2 > 0, \\ x + 5 < 0; \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x - 2 < 0, \\ x + 5 > 0. \end{cases}$$

Первая из этих систем решений не имеет, множество решений второй системы — числовой промежуток $(-5; 2)$.

б) Значение дроби отрицательное, если один из ее членов отрицательный, а второй положительный. Поэтому решение неравенства б) такое же, как и решение неравенства а). И ответ такой же: $(-5; 2)$.

94*. Решите неравенство:

а) $(x + 2)(x - 7) < 0$; б) $(x - 3)(2x - 5) > 0$;

в) $(3 - 2z)(1 + z) \geqslant 0$; г) $(2y + 8)(7 - 4y) \leqslant 0$;

д) $0{,}5x(x + 3) < 0$; е) $(x^2 + 1)(5 - x) \leqslant 0$.

95*. Решите неравенство:

а) $\frac{x + 3}{7 - x} < 0$; б) $\frac{x - 5}{x - 7} > 0$; в) $\frac{x - 3}{2x - 1} < 0$;

г) $\frac{5 - 2x}{2x - 7} < 0$; д) $\frac{13}{x + 4} < 0$; е) $\frac{x^2 + 2}{x - 2} > 0$;

ж) $\frac{(x^2 + 3)x}{2x - 3} > 0$; з) $\frac{3x + 5}{x(x^2 + 1)} > 0$; и) $\frac{x^8}{x - 3} < 0$.

§ 52. Доказательство неравенств

Иногда бывает необходимо доказать, что данное неравенство с переменными верное при всех указанных значениях переменных. Это можно делать на основании определения понятий больше и меньше: $A > B$, если разность $A - B$ — число положительное и т. д.

Пример 1. Докажите, что при каждом действительном значении a

$$a^2 + 2 > 2a.$$

Доказательство. $a^2 + 2 - 2a = a^2 - 2a + 1 + 1 = (a - 1)^2 + 1$. При каждом действительном значении a значение выражения $(a - 1)^2$ неотрицательное, а $(a - 1)^2 + 1$ — положительное. Следовательно, всегда $a^2 + 2 > 2a$.

Пример 2. Докажите, что при положительных a и b

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}.$$

Доказательство.

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}.$$

Полученное выражение $\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}$ при любых положительных a и b неотрицательно. Следовательно, если $a > 0$ и $b > 0$, то

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}.$$

Равенство тут имеет место только тогда, если $a = b$.

Примечание. Выражение $\frac{a+b}{2}$ называют *средним арифметическим* чисел a и b, а выражение $\sqrt{ab}$ — их *средним геометрическим*. Поэтому доказанное неравенство читают так: *среднее арифметическое двух положительных чисел не меньше их среднего геометрического.*

Пример 3. Докажите, что при положительных a, b и c

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8abc.$$

Доказательство. Поскольку среднее арифметическое двух положительных чисел не меньше их среднего геометрического, то

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}, \quad \frac{b+c}{2} \geqslant \sqrt{bc}, \quad \frac{c+a}{2} \geqslant \sqrt{ca}.$$

Перемножив почленно эти неравенства, имеем:

$$\frac{a+b}{2} \cdot \frac{b+c}{2} \cdot \frac{c+a}{2} \geqslant \sqrt{ab \cdot bc \cdot ca},$$

или

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8abc.$$

Докажите для каждого действительного значения a неравенства 96—99.

96. а) $(2a-1)(2a+1) < 4a^2$;

б) $(a-3)^2 > a(a-6)$.

97. а) $a^2 + 65 > 16a$; б) $a^4 + 82 > 18a^2$.

98. а) $(a + 1)^2 \geqslant 4a$; б) $99 + 20a < (a + 10)^2$.

99. а) $\frac{2a}{1 + a^2} \leqslant 1$; б) $\frac{a^2 + 4}{4a} > 1$.

100. Докажите, что для каждого отрицательного значения x:

а) $(x - 1)(x - 2) > 0$; б) $x^2 + 9 > 10x$.

в) $(x - 3)(3 - x) < 0$; г) $(2 - x)(x - 3) < 0$.

101. Докажите, что для каждого положительного c:

а) $c + \frac{1}{c} \geqslant 2$; б) $9c + \frac{1}{c} \geqslant 6$;

в) $(c + 1)\left(\frac{1}{c} + 1\right) \geqslant 4$; г) $(1 - c)\left(1 - \frac{1}{c}\right) < 0$.

102. Докажите, что при любых значениях переменных:

а) $a^2 - ab + b^2 \geqslant 0$;

б) $a^2 + b^2 + 2 \geqslant 2(a + b)$;

в) $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + ac + bc$;

г) $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geqslant 2(a + b + c)$.

103. Докажите, что сумма квадратов двух каких-либо действительных чисел не меньше их удвоенного произведения.

104. Докажите, что среднее арифметическое двух каких-либо действительных чисел больше меньшего из них и меньше большего.

105. Что больше:

а) сумма квадратов двух положительных чисел или квадрат их суммы;

б) сумма квадратов двух отрицательных чисел или квадрат их суммы?

106. Докажите, что полусумма квадратов двух действительных чисел не меньше квадрата их полусуммы.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Вариант 1

1. Решите неравенство:

а) $3x - 5 < 13$; б) $z - \frac{3 + 2z}{2} \geqslant \frac{1 - 2z}{4}$.

2. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 2x + 3 > 7, \\ x - 5 \leqslant 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3 - \frac{x - 2}{2} \leqslant x, \\ 5(x - 2) < 8x + 1. \end{cases}$

3. Решите двойное неравенство $-1 \leqslant 2x - 3 < 5$.

4. Докажите, что при каждом значении переменной $a^2 - 2a + 3 > 0$.

Вариант 2

1. Решите неравенство:

а) $4x - 7 < 13$; б) $c - \frac{2 - 3c}{3} > \frac{1 + 2c}{6}$.

2. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 3x - 7 < 5, \\ 2x + 1 \geqslant 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2 - \frac{x - 1}{3} \geqslant x, \\ 7(x - 3) > 5x - 2. \end{cases}$

3. Решите двойное неравенство $-3 < 2c + 1 \leqslant 7$.

4. Докажите, что при каждом значении переменной $n^2 + 2n + 4 > 0$.

Вариант 3

1. Решите неравенство:

а) $5x - 4 > 26$; б) $2y - \frac{1 - 3y}{4} \leqslant \frac{5 + y}{8}$.

2. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 5x - 2 \leqslant 18, \\ 2x + 3 > 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4 - \frac{2 - x}{3} > x, \\ 2(x - 4) \geqslant 5x - 2. \end{cases}$

3. Решите двойное неравенство $-2 \leqslant 3n + 4 < 10$.

4. Докажите, что при каждом значении переменной $c^2 + 2c + 5 > 0$.

Вариант 4

1. Решите неравенство:

а) $7x + 3 > 38$; б) $3z - \frac{5 - 2z}{6} \leqslant \frac{2z + 3}{2}$.

2. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 4x - 3 > 5, \\ 5x + 2 \leqslant 27; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3 - \frac{x - 4}{2} < 3x, \\ 5(x - 1) \geqslant 3x - 1. \end{cases}$

3. Решите двойное неравенство $-5 < 2m - 1 \leqslant 7$.

4. Докажите, что при каждом значении переменной $p^2 - 2p + 8 > 0$.

Глава X

ФУНКЦИИ И ГРАФИКИ

§ 53. Функции

Если каждому значению переменной x из некоторого множества D соответствует единственное значение переменной y, то такое соответствие называют *функцией*. При этом x называют *независимой переменной* или *аргументом*, y — *зависимой переменной*, а множество D — *областью определения функции*.

Задают функции чаще всего формулами, таблицей или графически. Например, формула $y = x^2$ задает функцию, выражающую соответствие между числами и их квадратами. Если область определения этой функции — множество целых чисел из промежутка $[-3; 3]$, то ее можно задать таблицей:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

График этой функции — семь точек, изображенных на рисунке 69. Ее область определения — множество $D = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, область значений — множество $E = \{0, 1, 4, 9\}$.

Если область определения функции $y = x^2$ — промежуток $[-2; 2]$, то ее графиком является часть параболы, изображенная на рисунке 70, а множеством значений — промежуток $[0; 4]$.

Графиком функции $y = x^2$, заданной на множестве всех действительных чисел R, является вся парабола с бесконечными ветками (рис. 71). Область определения этой функции — множество всех действительных чисел R, а область значений — промежуток $[0; \infty)$.

Напомним еще несколько примеров функций.

$y = kx$ — *прямая пропорциональность*. Ее график — прямая, проходящая через начало координат (рис. 72).

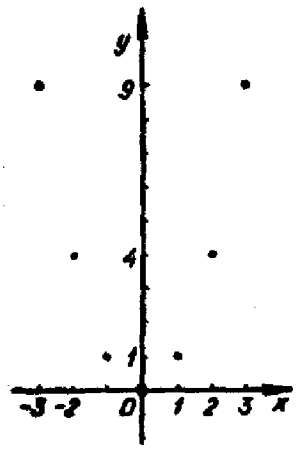


Рис. 69

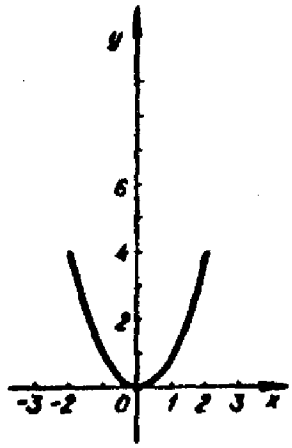


Рис. 70

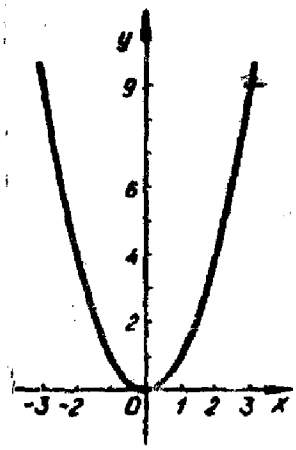


Рис. 71

Область определения этой функции — множество R, область значений при $k \neq 0$ — также множество R.

$y = kx + b$ — *линейная функция*. Ее график — прямая, не параллельная оси y (рис. 73). Область определения R, область значений — множество R при $k \neq 0$. При $k = 0$ область значений — одно число b (рис. 74).

$y = \frac{k}{x}$ — *обратная пропорциональность*. Ее график — гипербола. При $k > 0$, ветки этой гиперболы располагаются в I и III четвертях координатной плоскости, при $k < 0$ — во II и IV четвертях (рис. 75). Область определения функции $y = \frac{k}{x}$ — множество R без числа 0, область значений — это же множество.

График функции $y = x^3$ изображен на рисунке 76. Ее область определения и множество значений — множество R.

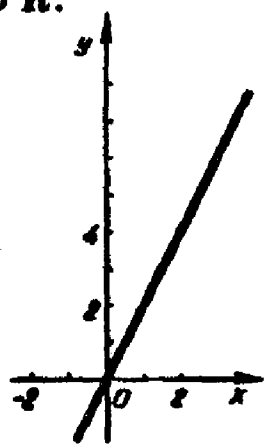


Рис. 72

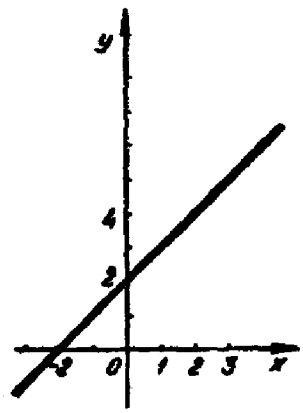


Рис. 73

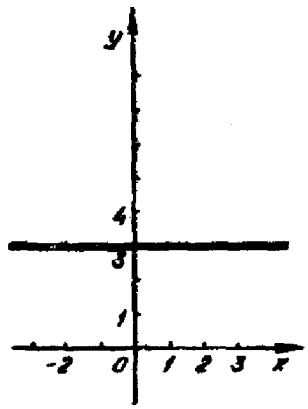


Рис. 74

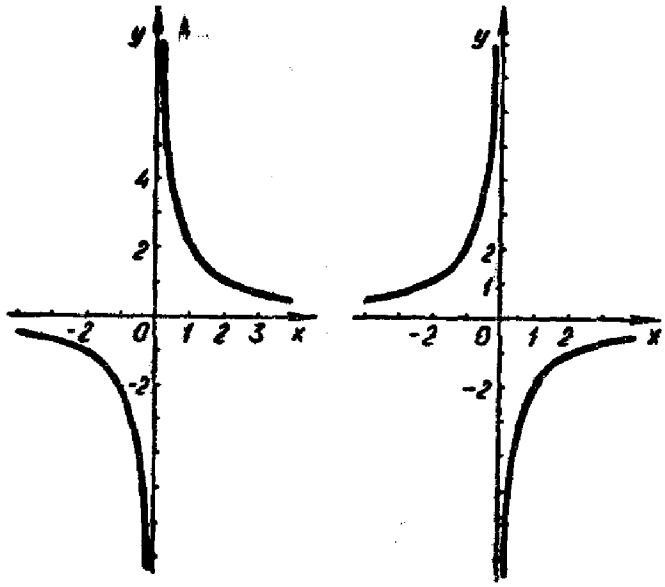


Рис. 75

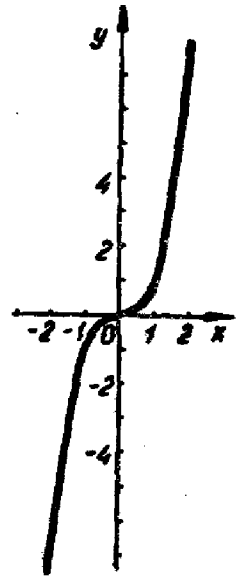


Рис. 76

График функции $y = \sqrt{x}$ — одна ветка параболы (рис. 77). Ее область определения $[0; \infty)$ и область значений $[0; \infty)$.

Если переменная y зависит от x, то записывают $y = f(x)$ (читают: игрек равен эф от икс). Символом $f(a)$ обозначают значения функции $y = f(x)$ при $x = a$. Пусть, например, функция задана формулой $y = 3x^2 - 5$. Можно записать и так: $f(x) = 3x^2 - 5$. В этом случае $f(0) = 3 \cdot 0^2 - 5 = -5$; $f(1) = 3 \cdot 1^2 - 5 = -2$; $f(-2) = 3 \cdot (-2)^2 - 5 = 7$.

Примечание. Если $y = f(x)$, то часто говорят, что y — функция от x, т. е. функцией называют переменную y. Однако в большинстве случаев под функцией понимают не одну зависимую переменную, а соответствие между значениями двух переменных. К

Рис. 77

тому же — не какое-нибудь соответствие, а однозначное, при котором каждому значению переменной x соответствует *единственное* значение переменной y.

107. Функция задана формулой $y = \frac{1}{2}x^2$ на области определения $D = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$. Задайте ее таблицей и графически.

108. Постройте график функции $y = \frac{1}{2}x^2$ на промежутке $[-4; 4]$. Найдите ее область значений.

109. Функция $y = \frac{1}{2}x^2$ задана на множестве R. Найдите ее область значений. Принадлежит ли графику этой функции точка $A(-100; 5000)$?

110. Найдите область определения функции:

а) $y = 3x - 2$; б) $y = \frac{3}{x-2}$; в) $y = \frac{10}{x^2+1}$;

г) $y = \frac{1}{(x-3)(x-4)}$; д) $y = \sqrt{x^2+1}$; е) $y = \sqrt{x+5}$.

111. Функция задана формулой $f(x) = x^3 - 5$. Найдите: $f(-3)$, $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(7)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(\sqrt{3})$.

112. $f(x) = x^2 \quad x + 1$. Найдите $f(0) + f(1) + f(2) + f(3)$.

113. На рисунке 78 изображен график функции $y = f(x)$. Найдите:

а) область определения и область значений данной функции;

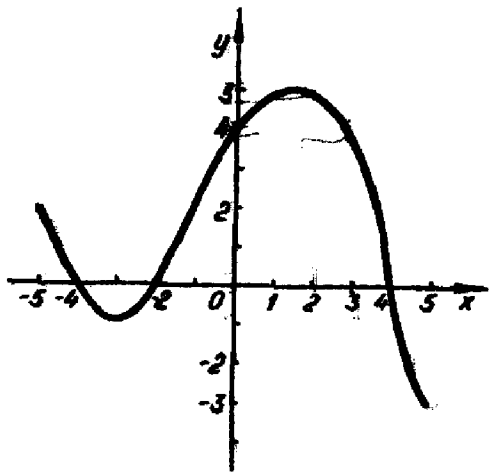


Рис. 78

б) $f(-5)$, $f(-4)$, $f(0)$, $f(4)$, $f(5)$;

в) для каких значений аргумента $f(x) = 4$, $f(x) = 0$?

г) для каких значений x значение $f(x)$ наибольшее, наименьшее?

114. Постройте график функции, заданной формулой:

а) $f(x) = 2 - 3x$; б) $f(x) = 3 - 2x$; в) $f(x) = -\frac{6}{x}$.

115*. Найдите область значений функции:

а) $f(x) = \frac{1}{x^2}$; б) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$; в) $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$.

116. Функция задана формулой $f(x) = x^2$. Верно ли, что для каждого числа a выполняется равенство $f(-a) = f(a)$?

117. Функция задана формулой $f(x) = x^4$. Для каждого ли значения ее аргумента x верно равенство $f(-x) = -f(x)$?

Постройте в одной системе координат графики функций 118—120.

118. $y = x^2$, $y = x^2 + 3$, $y = x^2 - 2$.

119. $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{x} + 2$, $y = \sqrt{x} - 3$.

120*. $y = |x|$, $y = |x| + 1$, $y = |x| - 2$.

§ 54. Преобразование графиков функций

Составим таблицы значений функций $y = x^2$ и $y = -x^2$, заданных на множестве $D = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

x	−2	−1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

x	−2	−1	0	1	2
y	−4	−1	0	−1	−4

Вообще, значения функции $y = -x^2$ противоположны соответствующим значениям функции $y = x^2$. Поэтому графики этих функций симметричны относительно оси x (рис. 79). Такое же свойство имеют какие-либо

функции $y = f(x)$ и $y = -f(x)$. ***Графики функций $y = f(x)$ и $y = -f(x)$ симметричны относительно оси x.***

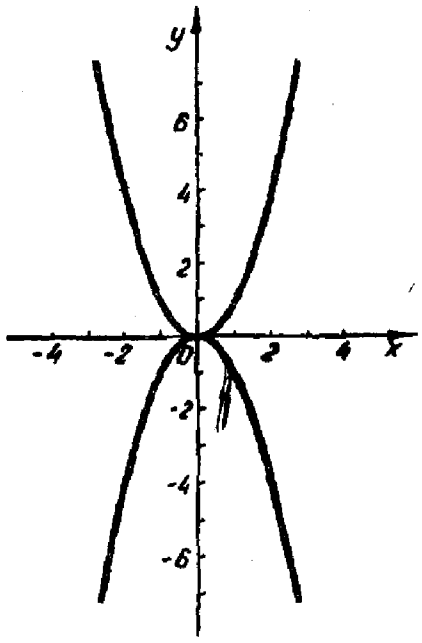


Рис. 79

Сравним еще функции $y = 2f(x)$ и $y = f(x)$. Чтобы получить какое-либо значение первой из них, нужно соответствующее значение второй умножить на 2. Поэтому график первой из этих функций можно получить, растянув вдвое от оси x график второй функции. А чтобы построить график функции $y = \frac{1}{3} f(x)$, следует втрое стиснуть к оси x график функции $y = f(x)$. Вообще, ***чтобы построить график функции $y = kf(x)$, нужно график функции $y = f(x)$ растянуть от оси x в k раз, если $k > 1$, или стиснуть его в k раз к оси x, если $0 < k < 1$.***

Пример. **Постройте графики функций $y = 2\sqrt{x}$, $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$ и $y = -\frac{1}{2}\sqrt{x}$.**

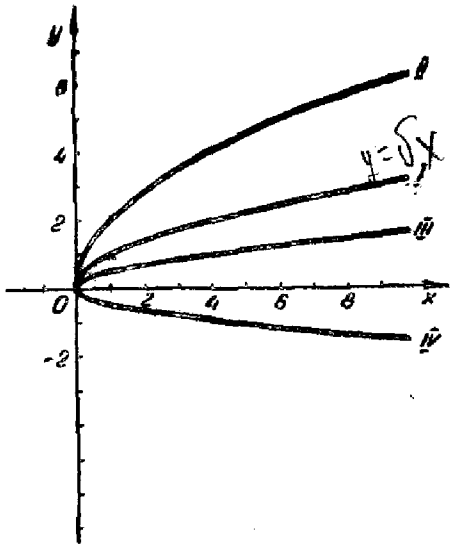


Рис. 80

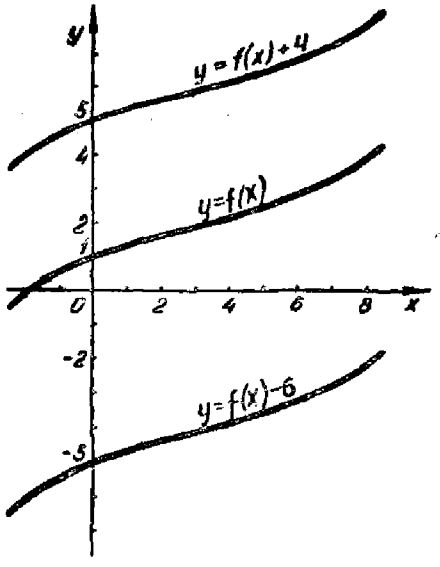


Рис. 81

Р е ш е н и е. Построим сначала график функции $y = \sqrt{x}$. На рисунке 80 его изображает кривая I. Увеличив вдвое ординату каждой точки этого графика, получим множество точек, расположенных на кривой II. Это — график функции $y = 2\sqrt{x}$. Если ординату каждой точки графика I уменьшить вдвое и нанести соответствующие точки на координатную плоскость, получим кривую III — график функции $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$. Кривая IV, симметричная относительно оси x кривой III,— график функции $y = -\frac{1}{2}\sqrt{x}$.

Каждое значение функции $y = f(x) + 4$ на 4 больше соответствующего значения функции $y = f(x)$. Поэтому график функции $y = f(x) + 4$ можно получить, перенеся график функции $y = f(x)$ на 4 единицы в направлении оси y (рис. 81). Чтобы получить график функции $y = f(x) - 6$, нужно график функции $y = f(x)$ перенести на 6 единиц в противоположном направлении. Вообще, ***чтобы получить график функции $y = f(x) + n$, нужно график функции $y = f(x)$ перенести на n единиц в направлении оси y, если $n > 0$, или в противоположном направлении, если $n < 0$.***

А как следует преобразовать график функции $y = f(x)$, чтобы получить график функции $y = f(x - m)$? Вычислим для одинаковых значений x значения функций $y = x^2$ и $y = (x - 2)^2$.

x	-4	-3	-2	-1	0	1
y	16	9	4	1	0	1

x	-4	-3	-2	-1	0	1
y	36	25	16	9	4	1

Как видим, при каждом значении $x = c$ значение функции $y = (x - 2)^2$ такое, как значение функции $y = x^2$, когда $x = c - 2$. Поэтому график функции $y = (x - 2)^2$ можно получить, перенеся график функции $y = x^2$ на 2 единицы в направлении оси x (рис. 82). График функции $y = (x + 3)^2$ можно получить перенесением графика функции $y = x^2$ на 3 единицы в направ-

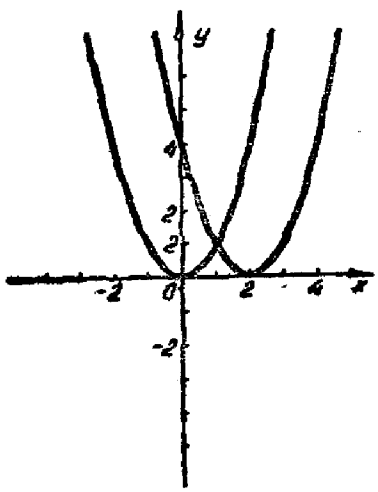


Рис. 82

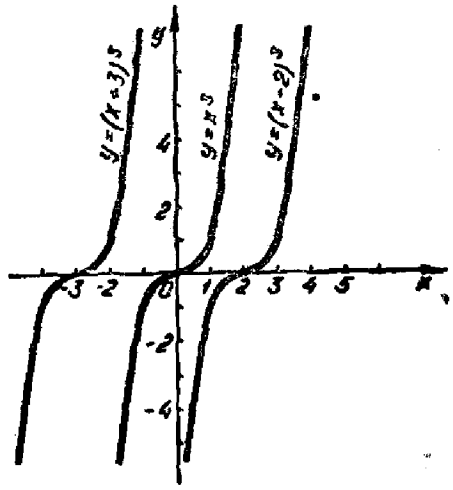


Рис. 83

лении, противоположном направлению оси x. Вообще, *чтобы получить график функции $y = f(x - m)$, достаточно график функции $y = f(x)$ перенести на m единиц в направлении оси x, если $m > 0$, или на $-m$ единиц в противоположном направлении, если $m < 0$.*

На рисунке 83 показано, как можно, например, из графика функции $y = x^3$ получить графики функций $y = (x - 2)^3$ и $y = (x + 3)^3$.

121. Как взаимно расположены графики функций:

а) $y = 2x$ и $y = -2x$; б) $y = \frac{1}{3}x$ и $y = -\frac{1}{3}x$;

в) $y = x^3$ и $y = -x^3$; г) $y = \frac{1}{x}$ и $y = -\frac{1}{x}$;

д) $y = x + 2$ и $y = -(x + 2)$; е) $y = \sqrt{x}$ и $y = -\sqrt{x}$?

122. Постройте график функции:

а) $y = -x^2$; б) $y = -x^3$; в) $y = -\sqrt{x}$.

123. Как можно построить график функции:

а) $y = 3x^2$; б) $y = \frac{1}{2}x^2$; в) $y = 0{,}5x^3$;

г) $y = -3x^2$; д) $y = -\frac{1}{2}x^2$; е) $y = -0{,}5x^3$?

124. Как нужно преобразовать график функции $y = x^2$, чтобы получить график функции:

а) $y = x^2 - 3$; б) $y = x^2 - 2$;

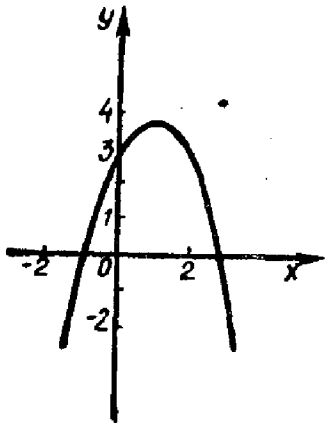


Рис. 84

в) $y = 1{,}5 + x^2$; г) $y = -x^2 - 3$;

д) $y = 2 - x^2$; е) $y = -1{,}5 - x^2$?

125. На рисунке 84 изображен график функции $y = f(x)$. Перерисуйте его в тетрадь и постройте в той же системе координат графики функций $y = -f(x)$, $y = 3 - f(x)$.

126. Постройте график функции $y = x^2 - 4$. Найдите ее область значений. При каких значениях x значения функции отрицательны?

127. Постройте график функции $y = 3 - x^2$. Найдите координаты пересечения графика с осями координат. Укажите область значений функции.

128. Постройте график функции:

а) $y = 2x^2 + 3$; б) $y = \frac{1}{2}x^2 - 3$;

в) $y = \frac{x^2 - 4}{2}$; г) $y = (x - 2)^2$;

д) $y = (x + 1)^2$; е) $y = -(x - 2)^2$;

ё) $y = 2(x + 3)^2$; ж) $y = \frac{1}{2}(x - 4)^2$;

з) $y = -3(x + 2)^2$.

129*. Постройте график функции:

а) $y = (x - 4)^2 + 2$; б) $y = (x - 4)^2 - 3$;

в) $y = 2(x - 1)^2 + 3$; г) $y = 2(x - 1)^2 - 3$;

д) $y = \frac{1}{2}(x + 2)^2 + 2$; е) $y = -3(x - 1)^2 + 4$.

§ 55. Квадратичная функция

Функция, которую можно задать формулой $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$, b, c — любые числа, а x — аргумент, называется *квадратичной функцией.*

Примеры квадратичных функций: $y = x^2$, $y = -x^2$, $y = x^2 + 3$, $y = (x + 4)^2$. Их графики — одинаковые параболы, только по-разному расположенные на координатной плоскости. График функции $y = ax^2$ — также пара-

$a = 1$; ее вершина лежит в начале координат, а ветки направлены вверх при $a > 0$, или вниз при $a < 0$.

Графики функций $y = ax^2 + bx + c$ и $y = ax^2$ — одинаковые параболы, которые можно совместить параллельным переносом. Докажем это.

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Поскольку $a \neq 0$, b, c — числа, то $\frac{b}{2a}$ и $\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ также числа. Обозначив их буквами m и n, получим тождество:

$$ax^2 + bx + c = a(x + m)^2 - n.$$

Таким образом, функцию $y = ax^2 + bx + c$ можно представить в виде $y = a(x + m)^2 - n$. Например, функцию $y = 3x^2 - 12x + 8$ можно записать так:

$$y = 3(x - 2)^2 - 4.$$

Из § 54 известно, что график функции $y = a(x + m)^2$ можно получить с помощью параллельного переноса на $|m|$ единиц вдоль оси x графика функции

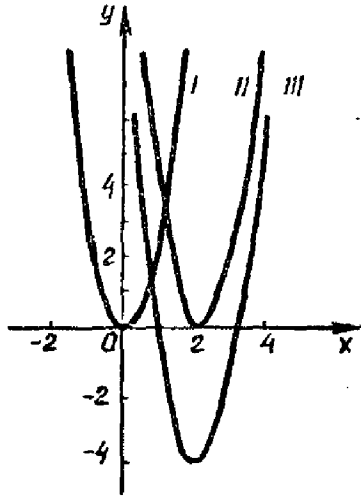


Рис. 85

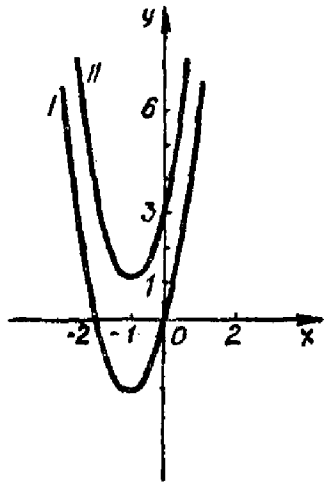


Рис. 86

$y = ax^2$. Если же график функции $y = a(x + m)^2$ перенести на $|n|$ единиц вдоль оси y, можно получить график функции $y = a(x + m)^2 - n$. Следовательно, с помощью двух параллельных переносов графика функции $y = ax^2$ можно получить график функции $y = a(x + m)^2 - n$, а отсюда и данной функции $y = ax^2 + bx + c$.

Например, чтобы построить график функции $y = 3x^2 - 12x + 8$, или $y = 3(x - 2)^2 - 4$, нужно график функции $y = 3x^2$ перенести в направлении оси x на 2 единицы (рис. 85), после чего кривую II перенести на 4 единицы вниз. Полученная кривая III — график данной функции.

Из приведенных рассуждений следует, что график функции $y = ax^2 + bx + c$ — парабола, координаты ее вершины: $-\frac{b}{2a}$ и $\frac{-b^2 + 4ac}{4a}$.

Чтобы построить график функции $y = ax^2 + bx + c$, можно найти координаты вершины параболы и нескольких ее точек, обозначить их на координатной плоскости и провести через них плавную линию. Можно применить другой способ: сначала построить график функции $y = ax^2 + bx$, а затем поднять или опустить его на $|c|$ единиц. График функции $y = ax^2 + bx$, или $y = x(ax + b)$ строить нетрудно, поскольку он пересекает ось абсцисс в точках $x = 0$ и $x = -\frac{b}{a}$.

Пример. Постройте график функции $y = 2x^2 + 4x + 3$.

Р е ш е н и е. График функции $y = 2x^2 + 4x$, или $y = x(2x + 4)$ пересекает ось x в точках $x = 0$ и $x = -2$. Обозначим их (рис. 86). Эти точки симметричны относительно оси параболы, которую надо построить, поэтому абсцисса ее вершины $x = -1$. Ордината ее равна $2 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1) = -2$. Обозначим точку $P(-1; -2)$. Через обозначенные три точки проходит график I функции $y = 2x^2 + 4x$. Перенеся его на 3 единицы вверх, получим график II данной функции $y = 2x^2 + 4x + 3$.

130. Постройте график функции:

а) $y = (x - 1)^2$; б) $y = x^2 - 2x + 1$;

в) $y = x^2 - 6x + 9$.

131. В каких точках ось x пересекается с графиком функции:

а) $y = x\,(x - 2)$; б) $y = -\,x\,(3x + 5)$;

в) $y = x^2 - 2x$; г) $y = 3x^2 + 5x$;

д) $y = 2x^2 - 6x$; е) $y = -\,3x^2 + 4x$?

132. Имеют ли общие точки ось x и график функции:

а) $y = (x - 3)^2$; б) $y = 2\,(3 - x)^2$;

в) $y = (x - 5)^2 + 2$; г) $y = 2\,(5 - x)^2 - 3$;

д) $y = 2\,(x + 1)^2 + 1$; е) $y = -\,2\,(x - 1)^2 - 3$?

133. Найдите координаты вершины параболы — графика функции:

а) $y = x^2 + 4$; б) $y = 2x^2 - 6$;

в) $y = x\,(x - 4)$; г) $y = x\,(2x + 6)$;

д) $y = x^2 - 4x$; е) $y = -\,8x - 3x^2$.

Постройте графики функций 134—140.

134. а) $y = (x - 1)^2 + 2$;

б) $y = (x + 2)^2 + 1$.

135. а) $y = (x - 3)^2 - 2$;

б) $y = (1 + x)^2 + 4$.

136. а) $y = x^2 - 2x + 5$;

б) $y = x^2 + 2x + 4$.

137. а) $y = 2x^2 + 4x + 3$;

б) $y = 2x^2 - 4x - 3$.

138. а) $y = 0{,}5x^2 - x + 2$;

б) $y = 0{,}3x^2 - 0{,}6x + 1$.

139. а) $y = x^2 + x + 1$;

б) $y = x^2 - x + 1$.

140. а) $y = -\,x^2 + 3x + 1$;

б) $y = -\,x^2 - 2x + 3$.

141. а) $y = 1 + x - x^2$;

б) $y = 4 - x - x^2$.

142. а) $y = (x - 1)(x + 2)$;

б) $y = (x + 2)(x - 3)$.

143. а) $y = (2x - 1)^2 + 3$;

б) $y = \left(\frac{1}{2}x + 2\right)^2 - 3$.

144. Проходит ли график функции $y = x^2 - 5x + 6$ через точку $A(-3; 14)$? А через точку $B(3; 14)$?

145. При каком значении n график функции $y = x^2 - 3x + n$ проходит через точку $M(3; 7)$? А через точку $K(-2; 3)$?

146. График функции $y = -x^2 - 4x + a$ пересекает ось y в точке $y = 5$. В каких точках он пересекает ось x?

§ 56. Графики функций и неравенства

Если левой частью неравенства является выражение $ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$, b, c — данные числа, а правой — ноль, то его называют *квадратичным неравенством*.

Примеры квадратичных неравенств: $x^2 - 5x + 3 < 0$, $2x^2 + 4 \leqslant 0$, $-3x^2 + 2x \geqslant 0$, $-x^2 + 3x + 7 > 0$.

Такие неравенства удобно решать с помощью графиков квадратичных функций.

Пример 1. Решите неравенство $x^2 - 6x + 5 < 0$.

Р е ш е н и е. Построим график функции $y = x^2 - 6x + 5$ (рис. 87). Отрицательные значения эта функция имеет только тогда, когда переменная x принадлежит промежутку $(1; 5)$. Это и есть множество решений данного неравенства.

О т в е т. $(1; 5)$.

Понятно, что для решения подобных неравенств строить точно графики квадратичных функций не обязательно. Достаточно определить направление веток параболы и точки пересечения графика с осью x (если они есть).

Пример 2. Решите неравенство $-x^2 + 2x + 3 \leqslant 0$.

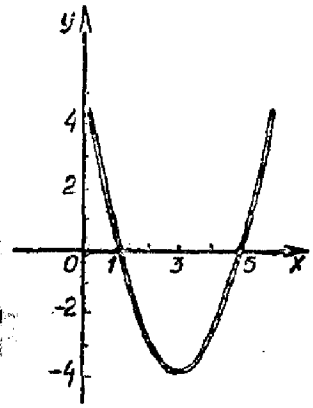


Рис. 87

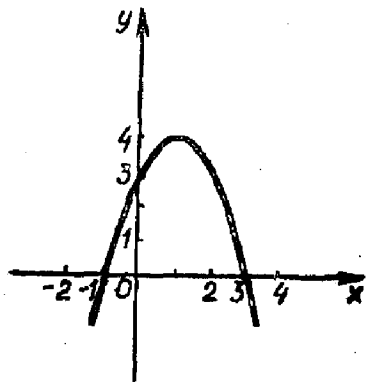


Рис. 88

Р е ш е н и е. График функции $y = -x^2 + 2x + 3$ пересекает ось x в точках с абсциссами -1 и 3; ветки параболы направлены вниз. Поэтому схематически график функции можно изобразить, как показано на рисунке 88. Значения функции неположительны при условии, что x принадлежит промежутку $(-\infty; -1]$ или $[3; \infty)$.

Следовательно, множество решений данного неравенства — объединение этих промежутков. Поскольку объединение множеств принято обозначать символом $\cup$, то ответ можно записать так: $(-\infty; -1] \cup [3; \infty)$.

Пример 3. Решите неравенство $x^2 + x + 1 < 0$.

Р е ш е н и е. Дискриминант уравнения $x^2 + x + 1 = 0$ отрицательный, поэтому график функции $y = x^2 + x + 1$ с осью x не имеет общих точек. Ветки графика направлены вверх (рис. 89). Следовательно, при каждом значении x значение функции $y = x^2 + x + 1$ положительно.

О т в е т. Неравенство решений не имеет.

Пример 4. Решите неравенство $(x + 4)(x + 1) > 0$.

Р е ш е н и е. Выражение $(x + 4)(x + 1)$ тождественно равно некоторому квадратному трехчлену с положительным коэффициентом при x^2. Значит, график функции $y = (x + 4)(x + 1)$ — парабола, ветки которой направлены вверх и которая пересекает ось x в точках

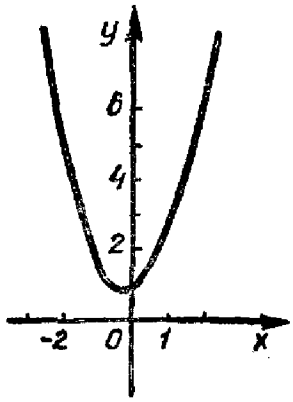


Рис. 89

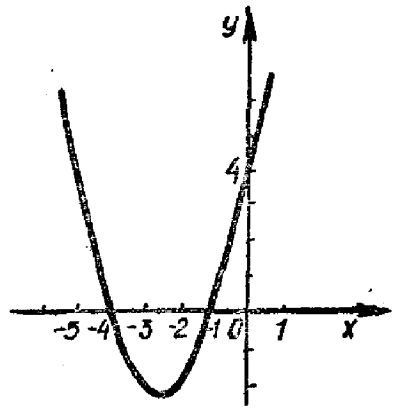


Рис. 90

с абсциссами -4 и -1 (рис. 90). Значения функции положительны при $x < -4$ или $x > -1$.

Ответ. $(-\infty; -4) \cup (-1; \infty)$.

Поскольку неравенство $\frac{x+4}{x+1} > 0$ равносильно неравенству $(x+4)(x+1) > 0$, то таким способом (графически) можно решать и более простые дробнорациональные неравенства.

147. Назовите квадратичные неравенства:

а) $x^2 - 5x + 6 < 0$; б) $3x^2 + 6 \leqslant 0$;

в) $-2x^2 - 5x + 7 \leqslant 0$; г) $x^3 - 2x + 6 \geqslant 0$;

д) $x^2 + \frac{1}{x} + 3 \geqslant 0$; е) $\frac{x^2}{3} + 4x + \sqrt{2} < 0$.

148. Изобразите на координатной прямой объединение промежутков:

а) $(-\infty; 2] \cup [3; \infty)$; б) $(-4; 3) \cup (4; 7]$;

в) $[2; 4] \cup (5; 7)$; г) $(-\infty; 3] \cup (3; 7)$;

д) $[-4; 2] \cup [2; 3]$; е) $(-\infty; 1) \cup (1; 4)$.

Решите неравенства **149—162.**

149. а) $x^2 - 4x < 0$;

б) $x^2 + 6x \leqslant 0$.

150. а) $y^2 - 4y - 5 < 0$;

б) $z^2 + 6z - 7 \leqslant 0$.

151. а) $x^2 - 6x + 9 > 0$;
б) $x^2 + 4x + 4 \leqslant 0$.

152. а) $x^2 > 2x - 1$;
б) $x^2 \leqslant 3x + 2$.

153. а) $2x^2 - 3x + 1 \geqslant 0$;
б) $0{,}5x^2 - x - 2 > 0$.

154. а) $-x^2 + 3x - 2 > 0$;
б) $2 - 3y \leqslant y^2$.

155. а) $3z^2 \leqslant 5z + 12$;
б) $-2x^2 > 2x + 3$.

156. а) $x(x - 3) < -2$;
б) $x(2 - x) \geqslant 4$.

157. а) $(x - 2)(x + 3) < 0$;
б) $(t + 3)(t + 4) \geqslant 0$.

158. а) $(2 - x)(3 - x) \leqslant 2$;
б) $(1 - z)(2 + z) > 2$.

159. а) $(3 - 2x)(x + 1) \leqslant 2$;
б) $2(x - 3)(1 - 2x) > 6$.

160. а) $x(x - 2) > 2 - 3x^2$;
б) $-x(2 - x) \leqslant 5 - 4x^2$.

161. а) $\frac{x-3}{x+2} < 0$; б) $\frac{x+2}{x-7} > 0$;

162. а) $\frac{2x-1}{3-x} < 0$; б) $\frac{4-x}{2x+5} > 0$.

163. Докажите, что при каждом x верно неравенство:

а) $x^2 + x + 1 > 0$; б) $2x^2 - x + 1 > 0$;
в) $x - x^2 - 1 < 0$; г) $x - 3x^2 - 1 < 0$.

164. Докажите, что:

а) для всех $x \neq 2$ $x^2 - 4x + 4 > 0$;

б) для всех $a > 5$ $a^2 - 5a + 6 > 0$.

165. Найдите область определения функции:

а) $y = \sqrt{x^2 - 2x - 15}$; б) $y = \sqrt{8 - 2x - x^2}$.

§ 57. Графическое решение систем уравнений

Графики функций и графики уравнений необходимо различать. На координатной плоскости изображена окружность радиуса $r = 5$ с центром в начале координат (рис. 91). Уравнение этой окружности $x^2 + y^2 = 25$. Можно сказать и так: графиком уравнения $x^2 + y^2 = 25$ является окружность, изображенная на рисунке 91.

Графиком уравнения $y = x^2$ (или равносильного ему уравнения $x^2 - y = 0$) является парабола — график функции $y = x^2$. Вообще, график функции $y = f(x)$ всегда является и графиком уравнения $f(x) - y = 0$.

А можно ли график уравнения $x^2 + y^2 = 25$ считать графиком какой-либо функции? Нет. В данном случае переменные x и y связаны соотношением $x^2 + y^2 = 25$ и одному значению $x = 3$ соответствует два разных значения переменной y: 4 и -4. Соответствие между переменными x и y только тогда считают функцией, когда каждому значению x из области определения соответствует единственное значение y. График уравнения только тогда является графиком какой-либо функции, если каждая прямая, параллельная оси y, пересекает его не более чем в одной точке.

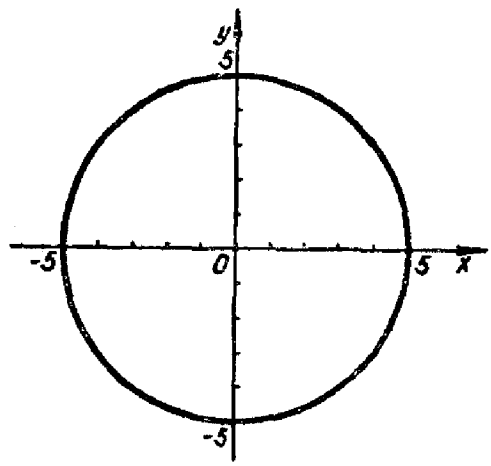


Рис. 91

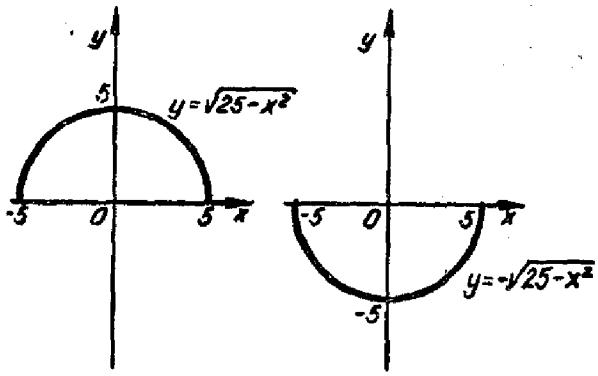


Рис. 92

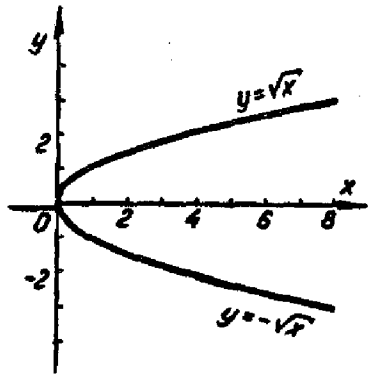


Рис. 93

Изображенные на рисунке 92 полуокружности — графики функций $y = \sqrt{25 - x^2}$ и $y = -\sqrt{25 - x^2}$. Их объединение — вся окружность — график не функции, а уравнения $y^2 = 25 - x^2$, или $x^2 + y^2 = 25$. Также графики функций $y = \sqrt{x}$ и $y = -\sqrt{x}$ — симметричные относительно оси x ветки параболы (рис. 93). Их объединение — вся парабола — график уравнения $y^2 = x$.

Следовательно, не каждый график уравнения является графиком функции. Однако и графики уравнений, и графики функций можно использовать для решения систем уравнений с двумя переменными. Пусть, например, нужно решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = 12. \end{cases}$$

График первого уравнения — окружность, второго — гипербола (график функции $y = \frac{12}{x}$). Построив эти графики в одной системе координат (рис. 94), находим координаты точек их пересечения: A (3; 4), B (4; 3), C (− 3; − 4), D (− 4; − 3). Проверка показывает, что найденные четыре пары чисел не приближенные решения системы уравнений, а точные. Имеем ответ:

$$x_1 = 3,\ y_1 = 4;$$

$$x_2 = 4,\ y_2 = 3;$$

$$x_3 = -3,\ y_3 = -4;$$

$$x_4 = -4,\ y_4 = -3.$$

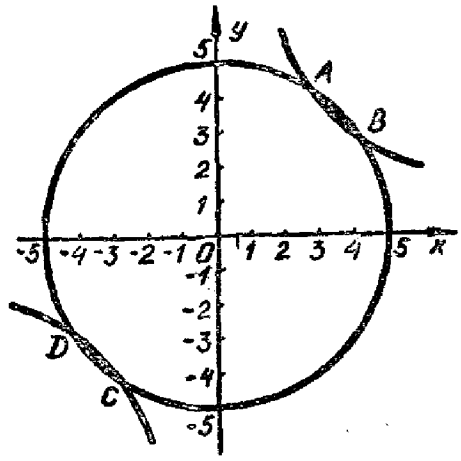


Рис. 94

Можно решить систему уравнений и не строя их графики, а например, способом подстановки. Выразив из второго уравнения $xy = 12$ переменную y через x и подставив это выражение в первое уравнение, получим уравнение с одной переменной x:

$$x^2 + \left(\frac{12}{x}\right)^2 = 25, \text{ или } x^4 - 25x^2 + 144 = 0.$$

Уравнение четвертой степени заменой $x^2 = t$ сводим к квадратному уравнению $t^2 - 25t + 144 = 0$, корни которого $t = 9$ и $t = 16$. Следовательно, $x^2 = 9$ и $x^2 = 16$. Корни этих двух уравнений: 3 и -3, 4 и -4. Подставив эти значения переменной x в уравнение $xy = 12$, найдем соответствующие значения переменной y: 4 и -4, 3 и -3.

Уравнение вида $ax^4 + bx^2 + c = 0$, где $a \neq 0$, b, c — данные числа, называют *биквадратным уравнением*. Подстановкой $x^2 = t$ каждое такое уравнение можно привести к квадратному уравнению.

166. Постройте график уравнения:

а) $2x + 3y = 6$; б) $xy = 12$;

в) $x^2 + y^2 = 4$; г) $y^2 - x = 0$;

д) $y = \sqrt{1 - x^2}$; е) $y = -\sqrt{4 - x^2}$.

Можно ли эти графики считать графиками функций?

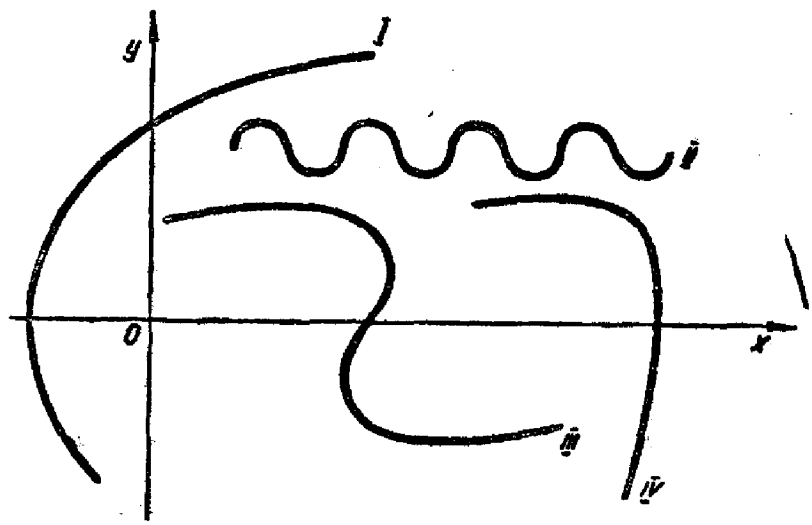


Рис. 95

167. Какие из кривых изображенных на рисунке 95 являются графиками функции?

168. Постройте график уравнения:

а) $x^2 + (y - 3)^2 = 4$; б) $(x + 2)^2 + y^2 = 9$;

в) $x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0$; г) $x^2 + 4x + y^2 - 5 = 0$.

Решите графически системы уравнений 169—172.

169. а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 18, \\ x - y = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + y = 1. \end{cases}$

170. а) $\begin{cases} xy = 16, \\ x - y = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} xy - 18 = 0, \\ y + 3x = 0. \end{cases}$

171. а) $\begin{cases} y^2 = x, \\ y = x^2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - y^2 = 0, \\ y - 2 = x. \end{cases}$

172. а) $\begin{cases} xy - 8 = 0, \\ x^2 - y = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} xy - 1 = 0, \\ y - \sqrt{x} = 0. \end{cases}$

173. Решите биквадратное уравнение:

а) $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$; б) $z^4 - 10z^2 + 25 = 0$;

в) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$; г) $16y^4 - 8y^2 + 1 = 0$.

174. Найдите координаты точек пересечения графика функции $y = x^4 - 5x^2 + 4$ с осями координат.

Решите системы уравнений 175—183.

175. а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 100, \\ x - 6 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x + 1 = 0. \end{cases}$

176. а) $\begin{cases} x + y = 3, \\ xy + 2 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 17, \\ x - y = 2. \end{cases}$

177. а) $\begin{cases} 3x + y = 7, \\ x - 2y^2 = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - y = 8, \\ 2x^2 - y^2 = 32. \end{cases}$

178. а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 61, \\ x^2 - y^2 = 11; \end{cases}$ б) $\begin{cases} xy + x = 56, \\ xy + y = 54. \end{cases}$

Р е ш е н и е. а) Сложив почленно данные уравнения, получим уравнение $2x^2 = 72$, корни которого -6 и 6. Подставив какое-нибудь из этих значений во второе уравнение данной системы, получим $36 - y^2 = 11$. Корни этого уравнения -5 и 5. Следовательно, система имеет четыре решения:

$$x_1 = 6,\ y_1 = 5;\ x_2 = 6,\ y_2 = -5;\ x_3 = -6,\ y_3 = 5;$$

$$x_4 = -6,\ y_4 = -5.$$

б) Вычтем почленно второе уравнение из первого: $x - y = 2$, или $y = x - 2$. Подставим в первое уравнение вместо y выражение $x - 2$:

$$x(x - 2) + x = 56,\quad x^2 - x - 56 = 0.$$

Корни этого квадратного уравнения -7 и 8. Подставив эти значения переменной x в уравнение $y = x - 2$, получим соответствующие значения переменной y: -9 и 6.

О т в е т: $x_1 = -7,\ y_1 = -9;\ x_2 = 8,\ y_2 = 6$.

179. а) $\begin{cases} x^2 - xy = 3{,}36, \\ 3x + y = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 2, \\ 3x + y = -4. \end{cases}$

180. а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ (x - 8)(x - 3) = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 50, \\ x(y + 1) = 0. \end{cases}$

181. а) $\begin{cases} x + y = 8, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{4}{3}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - y = 0, \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{6}. \end{cases}$

182*. а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 90, \\ x(x - 3y) = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (x + y)(x - y) = 0, \\ x^2 + y^2 = 64. \end{cases}$

183*. а) $\begin{cases} x^2y^2 + xy = 72, \\ x + y = 6; \end{cases}$

б) $\begin{cases} (x + y)^2 - 4(x + y) = 45, \\ (x - y)^2 - 2(x + y) = 3. \end{cases}$

184. Найдите стороны прямоугольника, диагональ которого равна 10 м, а площадь 48 м^2.

185. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 61 см, а периметр 132 см. Найдите катеты.

186. Найдите катеты прямоугольного треугольника, если один из них меньше гипотенузы на 2 см, а второй — на 25 см.

187. Найдите расстояние между точками пересечения прямой и окружности, уравнения которых $x - y = 7$ и $x^2 + y^2 = 169$.

188. Найдите расстояние между точками пересечения окружностей, уравнения которых $x^2 + y^2 = 25$ и $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 1$.

§ 58. Свойства функций

Описывая свойства функции, обычно начинают с ее области определения. Область определения функции — проекция ее графика на ось x; область значений функции — проекция ее графика на ось y (рис. 96). Например, область определения функции $y = x^2$ множество всех действительных чисел R, область ее значений — промежуток $[0; \infty)$. Область определения и область значений функции $y = \sqrt{4 - x^2}$ — промежутки $[-2; 2]$ и $[0; 2]$ (рис. 97).

Если для л ю б ы х двух значений аргумента *большему значению аргумента* соответствует *большее (меньшее) значение функции*, то такую функцию называют *возрастающей (убывающей)*. Например, функции $y = 2x$, $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$ возрастающие, а функции

Рис. 96

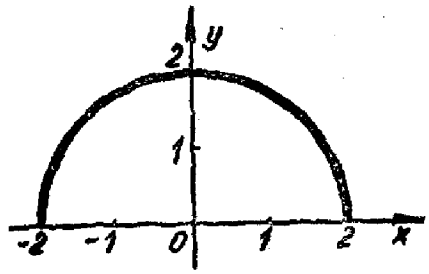


Рис. 97

$y = -2x$, $y = -\sqrt{x}$ **убывающие.** График возрастающей функции **«идет вверх»**, а убывающей — «опускается **вниз»**.

Можно также говорить о возрастании и убывании функции не на всей области определения, а только на отдельных промежутках. Например, функция $y = x^2$ на промежутке $(-\infty; 0)$ убывает, а на $(0; \infty)$ возрастает.

Если график функции *симметричен относительно оси y*, ее называют *четной*. Если график функции *симметричен относительно начала координат*, ее называют *нечетной*. Функция $y = f(x)$ четная, если ее область определения симметрична относительно нуля и для каждого значения x из области определения $f(-x) = f(x)$.

Примеры. Функция $y = x^2$ с областью определения R и $y = x^2$ с областью определения $[-5; 5]$ — четные. Функции $y = x^3$ с областью определения R и $y = x^3$ с областью определения $[-27; 27]$ — нечетные. А, например, каждая функция с областью определения $[-3; 7]$ и каждая функция $y = x^2 + x$ с какой-либо областью определения — ни четная, ни нечетная.

Функция, заданная формулой $y = x^n$, где x — аргумент, а n — любое натуральное число, называется *степенной функцией с натуральным показателем*. Конкретные примеры таких функций: $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^4$, $y = x^5$.

Степенная функция с натуральным показателем n *четная*, если число n — *четное* (рис. 98), или *нечетная*, если число n *нечетное* (рис. 99).

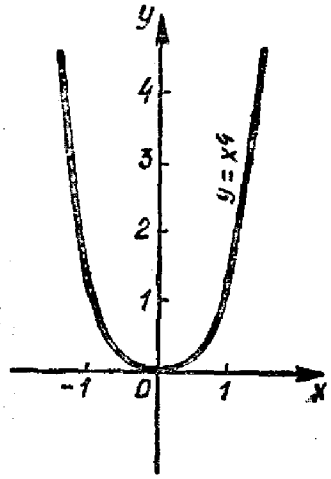


Рис. 98

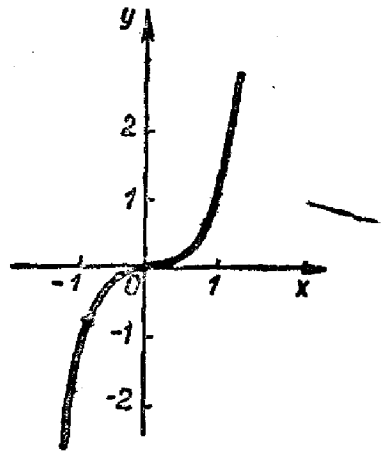


Рис. 99

Более основательно свойства степенных и других функций рассматриваются в старших классах.

189. Найдите область определения и область значений функции:

а) $y = 3x^2 - 1$; б) $y = \frac{2 - x}{3}$;

в) $y = \frac{1}{x} + 2$; г) $y = 1 - \sqrt{x}$.

190. Найдите область значений функции $y = x^2$ на промежутке:

а) $(0; 3)$; б) $(-5; -3)$; в) $[-2; 3)$; г) $[-4; 4)$.

191. Назовите область определения и область значений функции, график которой изображен на рисунке 100.

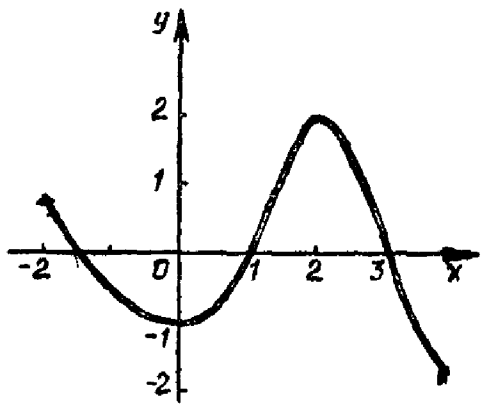


Рис. 100

192. Найдите область определения функции $y = x^3 - 8$, если ее область значений $[-35; 0]$.

193. Возрастающей или убывающей является функция:

а) $y = \frac{1}{3}x - 2$; б) $y = 3 - 2x$;

в) $y = 1 + x^3$; г) $f(x) = 1 - x^3$;

д) $g(x) = 1 + \sqrt{x}$; е) $z = -\sqrt{x}$?

194. Найдите промежутки возрастания функции:

а) $y = x^2 - 3$; б) $y = 2x - x^2$; в) $y = -\frac{1}{x}$.

195. Найдите промежутки убывания функции:

а) $y = x(x + 4)$; б) $y = (1 - x)^2$; в) $y = x^2 + x + 1$.

196. Какие из функций, рассмотренных в задачах 194 и 195, четные, какие нечетные? Приведите другие примеры четных и нечетных функций.

197. Даны функции $f(x) = x^5$ и $g(x) = x^6$. Вычислите:

$$f(2),\ f(-2),\ g(2),\ g(-2),\ f\left(\frac{1}{2}\right),\ f\left(-\frac{1}{2}\right),\ g\left(\frac{1}{2}\right),\ g\left(-\frac{1}{2}\right).$$

198. Покажите, что функция $f(x) = x^4 + 3$ четная, а $\varphi(x) = x^3 + x$ нечетная.

199. Имеют ли один и тот же смысл предложения «функция $y = f(x)$ не является четной» и «функция $y = f(x)$ — нечетная»? Почему?

200. Покажите, что функция $f(x) = x^2 + x$ ни четная, ни нечетная.

201. Существует ли функция одновременно и четная, и нечетная?

Р е ш е н и е. Существует. Таковой является каждая функция $y = 0$, если ее область определения — все множество действительных чисел или промежуток $(-a; a)$, где a — любое положительное число. Ее график симметричен и относительно оси y, и относительно начала координат.

202. Сравните числа:

а) $1{,}3^8$ и $1{,}4^8$; б) $0{,}7^{12}$ и $0{,}8^{12}$;

в) $(-1{,}5)^9$ и $(-1{,}6)^9$; г) $(-0{,}3)^{15}$ и $(-0{,}7)^{15}$.

203. Сколько решений имеет уравнение:

а) $x^{11} = 8$; б) $x^3 + 8 = 0$; в) $x^3 = 4x$;

г) $x^4 = x + 1$; д) $x^6 = x - 3$; е) $x^7 + x - 3 = 0$?

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Вариант 1

1. Постройте график функции:

а) $y = -x^2$; б) $y = 2 + \sqrt{x}$.

2. Постройте график функции $y = x^2 - 2x - 3$. Найдите ее область определения и множество значений. При каких значениях x значения функции отрицательны?

3. Решите неравенство:

а) $x^2 - 2x < 0$; б) $\frac{x-2}{x-5} < 0$.

4. Решите графически систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ \sqrt{x} - y = -1. \end{cases}$$

Вариант 2

1. Постройте график функции:

а) $y = -\sqrt{x}$; б) $y = x^2 - 4$.

2. Постройте график функции $y = x^2 + 2x - 3$. Найдите ее область определения и множество значений. При каких значениях x значения функции отрицательны?

3. Решите неравенство:

а) $2x - x^2 > 0$; б) $\frac{x+3}{x-2} < 0$.

4. Решите графически систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ x^2 - y = 0. \end{cases}$$

Вариант 3

1. Постройте график функции:

а) $y = -\frac{1}{x}$; б) $y = x^2 + 2$.

2. Постройте график функции $y = 4x - x^2$. Найдите ее область определения и множество значений. При каких значениях x значения функции положительны?

3. Решите неравенство:

а) $x^2 + 3x \leqslant 0$; б) $\frac{x-4}{x+3} > 0$.

4. Решите графически систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ xy = 1. \end{cases}$$

Вариант 4

1. Постройте график функции:

а) $y = -x^3$; б) $y = 4 - x^2$.

2. Постройте график функции $y = x^2 - 5x + 4$. Найдите ее область определения и множество значений. При каких значениях x значения функции положительны?

3. Решите неравенство:

а) $x^2 - 4x \leqslant 0$; б) $\frac{x+5}{x-1} > 0$.

4. Решите графически систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ \sqrt{x} - y = -1. \end{cases}$$

Глава XI

ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

§ 59. Последовательность

Представим, что подряд выписаны все четные натуральные числа:

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, ...

Это — *последовательность* четных натуральных чисел. Число 2 — ее первый член, 4 — второй, 6 — третий, 20 — десятый и т. д.

Приведем еще несколько примеров числовых последовательностей:

1, 2, 3, 4, 5, ...— последовательность натуральных чисел,

1, 3, 5, 7, 9, ...— последовательность нечетных натуральных чисел,

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$, ...— последовательность чисел, обратных натуральным.

Последовательности бывают *конечными* и *бесконечными*. Конечная, например, последовательность однозначных натуральных чисел:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Последовательность всех натуральных чисел бесконечна. Записывая бесконечную последовательность, после нескольких ее первых членов ставят многоточие.

Первый, второй, третий члены последовательности четных натуральных чисел равны соответственно 2, 4, 6. Пишут: $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 6$. А чему равен ее n-й член a_n? Поскольку каждый член последовательности четных натуральных чисел вдвое больше своего порядкового номера, то ее n-й член равен $2n$, т. е.

$$a_n = 2n.$$

Это формула n-го члена последовательности четных натуральных чисел.

Формула n-го члена последовательности нечетных натуральных чисел

$$a_n = 2n - 1.$$

Если известна формула n-го члена последовательности, то нетрудно вычислить какой угодно ее член. Напишем несколько первых членов последовательности, n-й член которой $a_n = n^2 + 2$. Придавая переменной n значения 1, 2, 3, 4, 5, ... , получим первые члены последовательности:

$$3, 6, 11, 18, 27, 38, 51, \ldots .$$

Тысячный член этой последовательности $a_{1000} = 1000^2 + 2 = 1000002$.

Труднее решить обратную задачу — для данной последовательности найти ее n-й член. Например, формула n-го члена последовательности простых чисел 2, 3, 5, 7, 11, 13, ...— неизвестна и теперь, хотя математики искали ее более 2000 лет.

Несколько первых членов последовательности не задают ее однозначно. Например, существует много различных последовательностей, первые члены которых 2, 4, 6, 8. В частности, такие первые члены имеют последовательности, n-е члены которых

$$a_n = 2n \text{ и } c_n = 2n + (n - 1)(n - 2)(n - 3)(n - 4).$$

Из двух соседних членов a_i и a_{i+1} последовательности член a_{i+1} называют *последующим* за a_i, а a_i — *предыдущим* по отношению к a_{i+1}. Последовательность называют *возрастающей*, если каждый ее член, начиная со второго, больше предыдущего. Последовательность называют *убывающей*, если каждый ее член, начиная со второго, меньше предыдущего.

Примечание. Иногда рассматривают также последовательности, членами которых являются различные выражения, функции, фигуры и т. д. Можно говорить и о последовательности месяцев в году, дней в неделе, букв в слове, фамилий в списке, вагонов в поезде, станций на железной дороге и т. п. Далее мы будем говорить только о *числовых* последовательнос-

тих, хотя и будем называть их коротко последовательностями.

204. Напишите несколько первых членов и n-й член последовательности квадратов натуральных чисел.

205. Напишите несколько первых членов и n-й член последовательности кубов натуральных чисел.

206. Напишите несколько первых членов последовательности натуральных чисел, кратных 3. Вычислите ее сороковой член.

207. Напишите несколько первых членов последовательности, n-й член которой $a_n = n^2 - 1$. Найдите a_{10}, a_{20}, a_{100}.

208. Найдите шестой, восьмой и десятый члены последовательности, n-й член которой $b_n = 2^n$.

209. Верно ли, что $a_n = 5n - 3$ — формула n-го члена последовательности натуральных чисел, при делении которых на 5 в остатке будет 2?

210. Напишите формулу n-го члена последовательности натуральных чисел, при делении которых на 7 в остатке будет 3.

211. Первый член последовательности равен 7, а каждый последующий на 2 больше предыдущего. Напишите несколько ее первых членов. Возрастающая или убывающая эта последовательность?

212. Первый член последовательности равен 5, а каждый последующий на 3 меньше предыдущего. Напишите несколько ее первых членов. Возрастающая или убывающая эта последовательность?

213. Последовательность a_1, a_2, a_3, a_4, ... такая, что $a_1 = -5$ и $a_{i+1} - a_i = 3$ для каждого натурального числа i. Найдите a_2, a_5, a_{10}.

214. Первый член последовательности равен $\frac{1}{2}$, а каждый последующий вдвое больше предыдущего. Напишите семь первых членов последовательности.

215. Запишите n-й член последовательности, первые члены которой:

а) 2, 5, 8, 11, ...;

б) 3, 6, 12, 24, 48, ...;

в) 0, – 2, – 4, – 6, ... ;

г) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \ldots$.

216. Первые два члена последовательности 1 и 3, а каждый последующий равен сумме двух предыдущих ее членов. Напишите 10 первых членов этой последовательности.

217*. Последовательность 1, – 1, 1, – 1, 1, – 1, ... такая, что сумма каких-либо двух ее соседних членов равна 0. Напишите ее n-й член.

218*. Напишите два разных n-х члена последовательностей, первые члены которых: 1, 3, 5, 7.

§ 60. Арифметическая прогрессия

Пусть дана последовательность, первый член которой 5, а каждый последующий член на 3 больше предыдущего:

5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, ...

Это — арифметическая прогрессия с первым членом 5 и разностью 3.

Арифметической прогрессией называется последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, к которому *прибавляют* одно и то же число. Это постоянное для данной последовательности число обозначают d и называют *разностью арифметической прогрессии.*

Первый член и разность арифметической прогрессии могут быть какими угодно числами. Арифметическая прогрессия *возрастающая*, если ее разность положительна, или *убывающая*, если ее разность отрицательна. Пример убывающей арифметической прогрессии: 11, 9, 7, 5, 3, 1, – 1, – 3, ...

Чтобы найти какой-либо член арифметической прогрессии, начиная со второго, нужно к предыдущему члену прибавить разность d. Поэтому если первый член и разность арифметической прогрессии равны соответ-

ственно a_1 и d, то первые члены этой арифметической прогрессии:

$$a_1,\ a_1 + d,\ a_1 + 2d,\ a_1 + 3d,\ a_1 + 4d,\ \ldots,$$

т. е.

$$a_2 = a_1 + d,\ a_3 = a_1 + 2d,\ a_4 = a_1 + 3d,\ a_5 = a_1 + 4d,\ \ldots.$$

Обратите внимание: коэффициент при d на единицу меньше порядкового номера члена прогрессии. Так же находим $a_6 = a_1 + 5d$, $a_7 = a_1 + 6d$ и вообще

$$a_n = a_1 + (n - 1)\,d.$$

Это *формула n-го члена арифметической прогрессии.*

Пример 1. В арифметической прогрессии $a_1 = 4$, $d = 3$. Найдите a_{20}.

Р е ш е н и е. $a_{20} = a_1 + 19d = 4 + 19 \cdot 3 = 61$.

Пример 2. В арифметической прогрессии $a_{19} = 8$, $d = -1$. Найдите a_1.

Р е ш е н и е. $a_{19} = a_1 + 18d$, $8 = a_1 - 18$. Следовательно, $a_1 = 26$.

Пример 3. Являются ли числа 1000 и 2000 членами арифметической прогрессии с первым членом 5 и разностью 3?

Р е ш е н и е. Если 1000 является i-м членом данной прогрессии, то $1000 = 5 + (i - 1)\,3$, $3\,(i - 1) = 995$, i — не натуральное число, т.к. 995 не делится на 3.

Если $2000 = 5 + (i - 1)\,3$, то $3\,(i - 1) = 1995$, откуда $i = 666$.

О т в е т. 1000 — не является членом данной арифметической прогрессии, а 2000 ее 666-й член.

Пусть дано n членов конечной арифметической прогрессии

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots\ ,\ a_{n-3},\ a_{n-2},\ a_{n-1},\ a_n.$$

Сложим первый и последний ее члены, затем второй и предпоследний, затем третий член от начала и третий член от конца и т. д. Результаты будут одинаковыми. Действительно, если $a_1 + a_n = m$, то

$$a_2 + a_{n-1} = (a_1 + d) + (a_n - d) = a_1 + a_n = m;$$

$$a_3 + a_{n-2} = (a_2 + d) + (a_{n-1} - d) = a_2 + a_{n-1} = m;$$

$$a_4 + a_{n-3} = (a_3 + d) + (a_{n-2} - d) = a_3 + a_{n-2} = m$$

и т. д.

Следовательно, ***сумма двух членов конечной арифметической прогрессии, равноудаленных от ее концов, равна сумме крайних членов.***

Выведем еще формулу суммы первых n членов арифметической прогрессии.

Пусть S_n — сумма первых n членов арифметической прогрессии $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n, \ldots$.

Если $a_1 + a_n = m$, то $a_2 + a_{n-1} = m$, $a_3 + a_{n-2} = m$ и т. д. Учитывая это, сложим почленно два равенства:

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \\ + \quad S_n &= a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1 \end{aligned}$$

$$2S_n = m + m + m + \ldots + m + m + m$$

$$2S_n = mn = (a_1 + a_n)\, n,$$

откуда

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}\, n.$$

Следовательно, ***сумма членов конечной арифметической прогрессии равна полусумме крайних ее членов, умноженной на число членов.***

Пример 4. Найдите сумму первых двадцати членов арифметической прогрессии 5, 7, 9, ...

Р е ш е н и е. Здесь $a_1 = 5$, $d = 2$. Поэтому $a_{20} = 5 + 19 \cdot 2 = 43$.

$$S_{20} = \frac{5 + 43}{2} \cdot 20 = 480.$$

219. Является ли арифметической прогрессией последовательность:

а) 1, 3, 5, 8, 11, 14, ... ; б) 0, – 1, – 3, – 5, – 8, ... ?

220. Напишите семь первых членов арифметической прогрессии, у которой:

а) $a_1 = 2$, $d = 5$; б) $a_1 = -3$, $d = 4$;

в) $a_1 = 0$, $d = \frac{1}{2}$; г) $a_1 = 4$, $d = -1$.

221. В арифметической прогрессии $a_1 = 9$, $d = 4$. Найдите a_{15}, a_{32}.

222. В арифметической прогрессии $a_2 = 14$, $a_3 = 25$. Найдите a_{10}, a_{20}.

223. В арифметической прогрессии $a_4 = 2$, $a_6 = 3$. Найдите a_{40}, a_{41}.

224. a_1, a_2, a_3, a_4, ... — арифметическая прогрессия. Найдите a_{30}, если

а) $a_3 = 3$, $a_4 = 4$; б) $a_5 = 9$, $a_7 = 13$;

в) $a_1 = 8$, $a_5 - a_3 = 6$; г) $a_2 = 5$, $a_5 - a_1 = 12$.

225. Запишите n-й член арифметической прогрессии:

а) 2, 5, 8, ... ; б) 7, 6, 5, ... ;

в) $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \ldots$; г) $2, 1\frac{1}{2}, 1, \ldots$.

226. Сколько отрицательных членов имеет арифметическая прогрессия:

а) $-32, -30, -28, \ldots$; б) $-8\frac{1}{2}, -8, -7\frac{1}{2}, \ldots$?

227. Является ли арифметической прогрессией последовательность, n-й член которой:

а) $a_n = 3n + 1$; б) $b_n = 5 - 4n$; в) $c_n = 2^n + 1$?

228. Учитель предложил найти сумму всех натуральных чисел от 1 до 40; думал, что школьники долго будут складывать сорок чисел. А маленький Карл Гаусс (со временем известный немецкий математик) задание выполнил за минуту. Как он рассуждал? Попробуйте задание выполнить устно.

229. Найдите сумму первых ста натуральных чисел.

230. Найдите сумму первых ста нечетных натуральных чисел.

231. В арифметической прогрессии первый член a_1 и разность d. Найдите сумму ее первых n членов S_n, если:

а) $a_1 = 3$, $d = 2$, $n = 32$;

б) $a_1 = -4$, $d = 4$, $n = 25$;

в) $a_1 = 15$, $d = -2$, $n = 40$;

г) $a_1 = -5$, $d = -7$, $n = 12$;

д) $a_1 = 0$, $d = 7$, $n = 35$;

е) $a_1 = 8$, $d = 0$, $n = 50$.

232. Найдите сумму первых сорока членов арифметической прогрессии:

а) 2, 7, 12, 17, ... ; б) 16, 13, 10, 7, ... ;

в) – 3, – 6, – 9, ...

233. Найдите сумму всех двузначных натуральных чисел.

Р е ш е н и е. Нужно найти сумму чисел 10, 11, 12, ... , 99. Это — конечная арифметическая прогрессия. Она имеет 90 членов, поэтому ее сумма

$$S = \frac{1}{2}(10 + 99)\,90 = 4905.$$

234. Найдите сумму натуральных чисел, меньших 1000-и кратных:

а) 3; б) 5; в) 12.

235. Найдите сумму всех целых чисел, принадлежащих промежутку:

а) $[-30; 70]$; б) $[-70; -30]$; в) $(-70; 70)$.

236. Найдите сумму всех натуральных чисел от 1 до n.

237. Докажите, что каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, равен полусумме соседних с ним двух членов.

238. Людям, копающим колодец, обещано за первый его метр заплатить 30 грн., а за каждый последующий на 20 грн. больше, чем за предыдущий метр. Сколько они получат за копание 12-метрового колодца?

239. З а д а ч а Ф е о ф а н а П р о к о п о в и ч а. У одного человека много лошадей, и у всех у них разная цена. Самый плохой конь стоит 4 золотых, а самый лучший 55 золотых, и цена от худшего коня к лучшему все время повышается на 3 золотых. Спрашиваем: сколько же всего было лошадей?

240. На стороне CA угла ACB от его вершины отложили равные отрезки и через их концы провели параллельные прямые (рис. 101). Найдите длины отрезков A_3B_3, A_7B_7, A_nB_n, если $A_1B_1 = 2{,}5$ см.

241. При свободном падении тело проходит за первую секунду 4,9 м, а за каждую последующую на 9,8 м больше. Найдите глубину шахты, если камушек достиг ее дна через 8 с после начала падения.

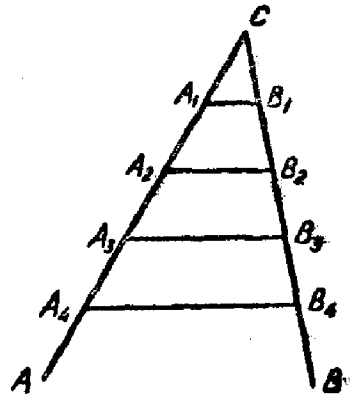


Рис. 101

242. Сколько секунд падала бы гайка с высоты 490 м?

243. Меры углов пятиугольника образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что один из этих углов имеет 108°. Составьте подобные задачи для треугольника и семиугольника.

244. Концы отрезков, параллельных основаниям трапеции, лежат на ее боковых сторонах и делят каждую из них на 8 равных отрезков. Найдите длины этих отрезков и их сумму, если основания трапеции a и b.

§ 61. Геометрическая прогрессия

Геометрической прогрессией называется последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, *умноженному* на одно и то же число. Это постоянное для данной последовательности число обозначают q и называют *знаменателем геометрической прогрессии.*

Первый член b_1 и знаменатель q геометрической прогресси могут быть какими угодно числами. Примеры геометрических прогрессий:

$$3,\ 6,\ 12,\ 24,\ 48,\ 96,\ \ldots\ (b_1 = 3,\ q = 2);$$

$$1,\ -3,\ 9,\ -27,\ 81,\ -243,\ \ldots (b_1 = 1,\ q = -3);$$

$$-1,\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{4},\ -\frac{1}{8},\ -\frac{1}{16},\ \ldots \left(b_1 = -1,\ q = \frac{1}{2}\right);$$

$$7,\ 7,\ 7,\ 7,\ 7,\ 7,\ 7,\ 7,\ \ldots\ (b_1 = 7,\ q = 1).$$

Примечание. Каждую арифметическую прогрессию с разностью 0 можно считать также геометрической прогрессией со знаменателем 1.

Геометрическая прогрессия с первым членом b_1 и знаменателем q имеет такие первые члены:

$$b_1,\ b_1 q,\ b_1 q^2,\ b_1 q^3,\ b_1 q^4,\ \ldots\ .$$

Ее второй член $b_2 = b_1 q$, третий член $b_3 = b_1 q^2$, а n-й член

$$b_n = b_1 q^{n-1}.$$

Это *формула n-го члена геометрической прогрессии.*

Пример 1. В геометрической прогрессии $b_1 = 5$, $q = 2$. Найдите b_{10}.

Р е ш е н и е. $b_{12} = b_1 q^{10-1}$, $b_{10} = 5 \cdot 2^9 = 2560$.

Пример 2. Первый и седьмой члены геометрической прогрессии равны соответственно 81 и $\frac{64}{9}$. Найдите ее знаменатель q.

Р е ш е н и е. По формуле n-го члена геометрической прогрессии

$$b_7 = b_1 q^6,\ \frac{64}{9} = 81 \cdot q^6,\ q^6 = \frac{64}{9 \cdot 81},\ q^6 = \left(\frac{2}{3}\right)^6.$$

А если $q^6 = \left(\frac{2}{3}\right)^6$, то $q = \frac{2}{3}$ или $q = -\frac{2}{3}$.

О т в е т. $\frac{2}{3}$ или $-\frac{2}{3}$.

Выведем еще формулу для нахождения суммы n первых членов геометрической прогрессии

$$b_1,\ b_1 q,\ b_1 q^2,\ b_1 q^3,\ \ldots\ ,\ b_1 q^{n-1}.$$

Пусть $S_n = b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \ldots + b_1 q^{n-2} + b_1 q^{n-1}$.

Умножим обе части этого равенства на q:

$$S_n q = b_1 q + b_1 q^2 + b_1 q^3 + \ldots + b_1 q^{n-1} + b_1 q^n.$$

Вычтем почленно из этого равенства предыдущее. При этом их одинаковые слагаемые $b_1 q$, $b_1 q^2$, ..., $b_1 q^{n-1}$ взаимно уничтожатся. В результате получим:

$$S_n q - S_n = b_1 q^n - b_1,$$

или

$$S_n (q - 1) = b_1 (q^n - 1),$$

откуда

$$S_n = \frac{b_1 (q^n - 1)}{q - 1}.$$

Это *формула суммы n первых членов геометрической прогрессии* с первым членом b_1 и знаменателем $q \neq 1$. При $q = 1$, эту формулу использовать нельзя (делить на 0 нельзя). В этом случае каждый член геометрической прогрессии равен b_1, поэтому $S_n = nb_1$.

Пример 3. Найдите сумму первых двадцати членов геометрической прогрессии 2, 6, 18, 54, ...

Р е ш е н и е. Здесь $b_1 = 2$, $q = 3$, поэтому

$$S_{20} = \frac{2 (3^{20} - 1)}{3 - 1} = 3^{20} - 1.$$

О т в е т. $3^{20} - 1$.

П р и м е ч а н и е. Сумма n членов геометрической прогрессии с увеличением числа n возрастает очень быстро. Кто не понимает этого, может оказаться в затруднительном положении (см. задачи 260—261).

245. Является ли геометрической прогрессией последовательность:

а) 3, 6, 12, 14, ... ; б) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$?

246. Напишите семь первых членов геометрической прогрессии, у которой:

а) $b_1 = 1$, $q = 3$; б) $b_1 = 10$, $q = \frac{1}{2}$;

в) $b_1 = -5$, $q = 2$; г) $b_1 = 1$, $q = -2$.

247. $b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots$ — геометрическая прогрессия. Найдите b_{12}, если:

а) $b_1 = 1$, $b_2 = 6$; б) $b_1 = 25$, $b_2 = -50$;

в) $b_3 = 1$, $b_4 = 0{,}5$; г) $b_2 = 2$, $b_4 = 4$.

248. Напишите формулу n-го члена геометрической прогрессии:

а) 3, 9, 27, 81, ... ; б) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$.

249. Является ли геометрической прогрессией последовательность, n-й член которой:

а) $b_n = 2^n$; б) $c_n = 9\left(\frac{1}{3}\right)^n$; в) $p_n = -\left(\frac{2}{3}\right)^n$?

250. Докажите, что квадрат каждого члена геометрической прогрессии, начиная со второго, равен произведению двух соседних его членов.

251. A_1C_1 — средняя линия ΔABC. A_2C_2 — средняя линия ΔA_1BC_1, A_3C_3 — средняя линия ΔA_2BC_2 и т. д. (рис. 102). Верно ли, что длины отрезков AC, A_1C_1, A_2C_2, ... образуют геометрическую прогрессию?

252. Дан равносторонний треугольник, из его медиан построен второй треугольник, из медиан второго — третий и т. д. Докажите, что периметры этих треугольников образуют геометрическую прогрессию. Какой ее знаменатель?

253. Середины сторон одного треугольника являются вершинами второго треугольника, середины сторон второго — вершинами третьего и т. д. Образуют ли геометрическую прогрессию периметры этих треугольников?

254. После каждого движения поршня разрежающего насоса из сосуда забирается 5 % имеющегося в ней воздуха. Определите давление воздуха внутри сосуда после десяти движений поршня, если начальное давление было 760 мм рт. ст.

255. Найдите сумму 15 первых членов геометрической прогрессии:

а) 1, 2, 4, 8, ... ; б) 1024, 512, 256, ... ;

в) 1, – 2, 4, – 8, ... ; г) 1024, – 512, 256, ...

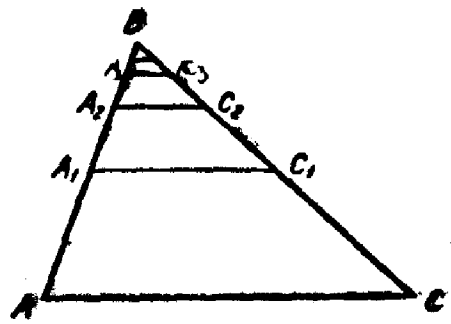


Рис. 102

256. Найдите сумму семи первых членов последовательности, n-й член которой:

а) $a_n = 2^n$; б) $a_n = 0{,}5^n$; в) $a_n = 5 \cdot (-1)^n$.

257. Найдите сумму n первых членов геометрической прогрессии, если:

а) $a_1 = 1$, $q = 2$, $n = 9$;

б) $a_1 = 1$, $q = \frac{1}{2}$, $n = 10$;

в) $a_1 = 81$, $q = \frac{1}{3}$, $n = 8$;

г) $a_1 = -2$, $q = 2$, $n = 12$.

258. Докажите тождество:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Р е ш е н и е. Если $a = b$ или $a = 0$, тождество очевидно. Докажем его и для других случаев. Последовательность a^{n-1}, $a^{n-2}b$, $a^{n-3}b^2$, ... — геометрическая прогрессия с первым членом a^{n-1} и знаменателем $\frac{b}{a}$. Поэтому

$$a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-1} + b^{n-1} = \frac{a^{n-1}\left(\frac{b^n}{a^n} - 1\right)}{\frac{b}{a} - 1} = \frac{a^n - b^n}{a - b},$$

откуда

$$(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-1} + b^{n-1}) \times (a - b) = a^n - b^n.$$

Формулы «разность квадратов» и «разность кубов» — частные случаи доказанного тождества (при $n = 2$ и $n = 3$).

259. Выведите формулу для нахождения произведения n первых членов геометрической прогрессии.

260. Было это почти сто лет назад. Крестьянин продавал 20 овец за 200 руб. Когда один из покупателей стал слишком долго торговаться, крестьянин предложил: «Дай за первую овцу 1 к., за вторую — 2 к., за

третью — 4 к. и далее за каждую овцу вдвое больше копеек, чем за предыдущую». Покупатель согласился. Сколько он заплатил за 20 овец?

261. З а д а ч а и з и н д и й с к о г о ф о л ь к л о р а. Царь очень любил шахматы и обещал изобретателя игры хорошо вознаградить. Изобретатель запросил дать ему за первую клетку шахматной доски одно пшеничное зерно, за вторую — два, за третью — четыре и далее за каждую последующую клетку вдвое больше, чем за предыдущую. Царь удивился, что изобретатель так мало запросил. Однако обещание не смог выполнить. Почему?

262. Бактерия, попав в организм, к концу 20-й минуты делится на две, каждая из них к концу 20-й минуты снова делится на две и т. д. Сколько бактерий станет в организме через сутки?

263. Представим, что в начале нашей эры женщина M родила две дочки, каждая из них до 30 лет родила также две дочки и т. д. Возможно ли это? Сколько при таких условиях наследников M жило бы в наше время?

§ 62. Задачи на вычисление сумм

До сих пор мы находили суммы членов самых простых последовательностей: арифметической и геометрической прогрессий. Нередко возникает необходимость вычислять суммы членов других последовательностей. Рассмотрим примеры.

Пример 1. Найдите сумму S первых ста членов последовательности

$$\frac{1}{1\cdot 2}, \frac{1}{2\cdot 3}, \frac{1}{3\cdot 4}, \ldots, \frac{1}{n(n+1)}, \ldots.$$

Р е ш е н и е. Каждый член данной последовательности можно представить в виде разности:

$$\frac{1}{1\cdot 2} = 1 - \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \ldots,$$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \ldots.$$

Следовательно,

$$S = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{100 \cdot 101} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{100} - \frac{1}{101} =$$

$$= 1 - \frac{1}{101} = \frac{100}{101}.$$

Ответ. $S = \frac{100}{101}$.

Пример 2. Найдите сумму квадратов n первых натуральных чисел.

Решение. По формуле «куб двучлена» $(a + 1)^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1$, откуда $3a^2 = (a + 1)^3 - a^3 - 3a - 1$. Придавая переменной a последовательно значения 1, 2, 3, ..., n, получим n верных числовых равенств:

$$3 \cdot 1^2 = 2^3 - 1^3 - 3 \cdot 1 - 1,$$
$$3 \cdot 2^2 = 3^3 - 2^3 - 3 \cdot 2 - 1,$$
$$3 \cdot 3^2 = 4^3 - 3^3 - 3 \cdot 3 - 1,$$
$$3 \cdot 4^2 = 5^3 - 4^3 - 3 \cdot 4 - 1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$3n^2 = (n + 1)^3 - n^3 - 3 \cdot n - 1.$$

Сложив почленно все эти равенства (числа 2^3, 3^3, 4^3, ..., n^3 взаимно уничтожатся), получим тождество:

$$3\,(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) =$$
$$= (n + 1)^3 - 3\,(1 + 2 + 3 + \ldots + n) - n - 1,$$

откуда

$$3\,(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) =$$
$$= (n + 1)^3 - \frac{3}{2}n\,(n + 1) - (n + 1) =$$
$$= \frac{n}{2}\,(n + 1)\,(2n + 1).$$

Следовательно,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n}{6}\,(n + 1)\,(2n + 1).$$

До сих пор мы не вычисляли сумм бесконечного числа слагаемых, однако иногда есть смысл рассматривать и такие суммы. Чему, например, равна сумма

всех членов бесконечной геометрической прогрессии $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$?

Пусть площадь изображенного на рисунке 103 квадрата b_1 равна 1, а площадь прямоугольников b_2, b_3, b_4, ... — соответственно $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$. Если число этих прямоугольников увеличивать до бесконечности, то сумма их площадей как угодно близко будет приближаться к числу 2. Поэтому считают, что

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = 2.$$

Обобщим рассмотренный пример. Пусть дана бесконечно убывающая геометрическая прогрессия b_1, $b_1 q$, $b_1 q^2$, $b_1 q^3$, ..., знаменатель которой $|q| < 1$. По известной формуле

$$S_n = \frac{b_1 (q^n - 1)}{q - 1} \text{ или } S_n = \frac{b_1}{1 - q} - \frac{b_1 q^n}{1 - q}.$$

Здесь число $\frac{b_1}{1 - q}$ постоянное, а n переменное. Если $|q| < 1$, то при неограниченном увеличении n степень q^n стремится к 0 (пишут: если $n \to \infty$, то $q^n \to 0$). При этом и дробь $\frac{b_1 q^n}{1 - q}$ стремится к 0. Следовательно, если $n \to \infty$, то $S_n \to \frac{b_1}{1 - q}$. Поэтому договорились суммой бесконечной геометрической прогрессии с первым членом b_1 и знаменателем $|q| < 1$ считать число $\frac{b_1}{1 - q}$.

Следовательно, если $|q| < 1$ и $b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \ldots = S$, то $S = \frac{b_1}{1 - q}$.

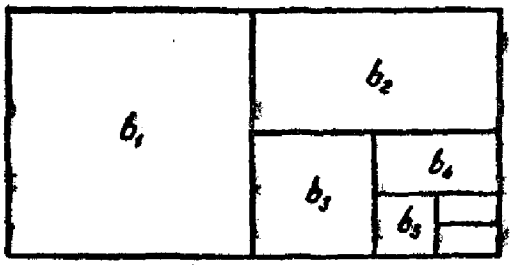


Рис. 103

Пример 3. Найдите сумму геометрической прогрессии $4, -\frac{4}{3}, \frac{4}{9}, -\frac{4}{27}, \ldots$.

Решение. Здесь $b_1 = 4$, $q = -\frac{1}{3}$, поэтому искомая сумма

$$S = \frac{4}{1 + \frac{1}{3}} = 3.$$

Ответ. $S = 3$.

264. Найдите сумму первых сорока членов последовательности:

а) $\frac{1}{1 \cdot 2}, \frac{1}{2 \cdot 3}, \frac{1}{3 \cdot 4}, \frac{1}{4 \cdot 5}, \ldots, \frac{1}{n(n+1)}, \ldots$;

б) $\frac{3}{1 \cdot 4}, \frac{3}{4 \cdot 7}, \frac{3}{7 \cdot 10}, \frac{3}{10 \cdot 13}, \ldots, \frac{3}{(3n-2)(3n+1)}, \ldots$.

265. Упростите выражение:

а) $\frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{2}{5 \cdot 7} + \ldots + \frac{2}{(2n-1)(2n+1)}$;

б) $\frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 11} + \ldots + \frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$;

в) $\frac{3}{1 \cdot 4} + \frac{3}{4 \cdot 7} + \frac{3}{7 \cdot 10} + \ldots + \frac{3}{(3n-2)(3n+1)}$;

г) $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$;

д) $\frac{2}{1+\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \ldots + \frac{2}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}$;

е) $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - \ldots - (2n)^2 + (2n+1)^2$

266. Докажите, что для каждого натурального n:

а) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} < 1$;

б) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{8}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2n}+\sqrt{2n+2}} < \sqrt{\frac{n+1}{2}}$

267. Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии:

а) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \ldots$;

б) $2, \frac{6}{4}, \frac{18}{16}, \ldots$.

в) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \ldots$;

г) $-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \ldots$

268. Найдите сумму, слагаемыми которой являются члены геометрической прогрессии:

а) $1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \ldots$; б) $1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{25} - \ldots$;

в) $1 + a + a^2 + a^3 + \ldots$; г) $1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$.

269. З а д а ч а А р х и м е д а. Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии

$$1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \ldots.$$

270. Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии:

а) $3 + \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \ldots$; б) $6 + \frac{6}{10} + \frac{6}{100} + \ldots$.

271. Запишите в виде обыкновенной дроби бесконечную периодическую дробь:

а) 0,(2); б) 1,(6); в) 0,(23)[1].

Р е ш е н и е.

а) $0,(2) = 0,2222\ldots = \frac{2}{10} + \frac{2}{100} + \frac{2}{1000} + \ldots = \frac{0,2}{1 - 0,1} = \frac{2}{9}$;

б) $0,(6) = 0,6666\ldots = \frac{6}{10} + \frac{6}{100} + \frac{6}{1000} + \ldots = \frac{0,6}{1 - 0,1} = \frac{2}{3}$.

Следовательно, $1,(6) = 1 + 0,(6) = 1\frac{2}{3}$;

в) $0,(23) = 0,2323\ldots = \frac{0,23}{1 - 0,01} = \frac{23}{99}$.

272. Найдите сумму членов бесконечной геометрической прогрессии: а) $1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \ldots$; б) $5, \sqrt{5}, 1, \ldots$;

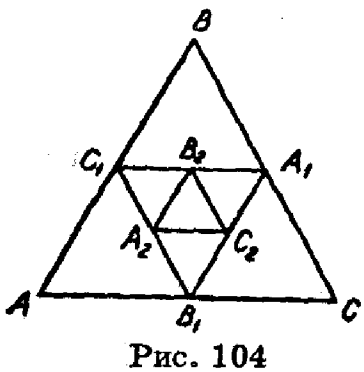


Рис. 104

в) $1, \pi - 3, (\pi - 3)^2, \ldots$;

г) $\frac{1}{2 - \sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2} - 1}{2\sqrt{2}}, \ldots$.

273. Дан равносторонний треугольник со стороной 1 см. Середины его сторон — вершины второго треугольника, середины сторон второго — вершины третьего треугольника и т. д. (рис. 104).

[1] В скобках даны бесконечно повторяющиеся цифры: 0,(2) = =0,222...; 0,(23) = 0,232323... .

Найдите сумму периметров всех этих треугольников.

274. В окружность радиуса r вписан правильный треугольник, в треугольник вписана вторая окружность, в которую снова вписан правильный треугольник и т. д. Найдите сумму периметров всех треугольников и сумму длин всех окружностей.

275. Сформулируйте и решите задачи о квадратах, подобные задачам 273 и 274.

276. Второй член бесконечной геометрической прогрессии равен 36, а ее сумма 259,2. Найдите третий ее член.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Вариант 1

1. Последовательность 3, 7, 11, 15, ... — арифметическая прогрессия. Определите ее n-й член, 50-й член и сумму первых 50 членов.

2. Последовательность 2, -6, 18, -54, ... — геометрическая прогрессия. Определите ее n-й член и сумму первых семи членов.

3. Найдите знаменатель возрастающей геометрической прогрессии, если ее первый, второй и четвертый члены образуют арифметическую прогрессию.

Вариант 2

1. Последовательность 2, 7, 12, 17, ... — арифметическая прогрессия. Определите ее n-й член, 40-й член и сумму первых 40 членов.

2. Последовательность 2, -4, 8, -16, ... — геометрическая прогрессия. Определите ее n-й член и сумму первых десяти членов.

3. Найдите знаменатель возрастающей геометрической прогрессии, если второй, третий и пятый ее члены образуют арифметическую прогрессию.

Вариант 3

1. Последовательность 5, 9, 13, 17, ... — ариф-

метическая прогрессия. Определите ее n-й член, 50-й член и сумму первых 50 членов.

2. Последовательность 3, – 6, 12, – 24, ... — геометрическая прогрессия. Определите ее n-й член и сумму первых десяти членов.

3. Найдите знаменатель возрастающей геометрической прогрессии, если ее третий, четвертый и шестой члены образуют арифметическую прогрессию.

Вариант 4

1. Последовательность 4, 7, 10, 13, ... — арифметическая прогрессия. Определите ее n-й член, 60-й член и сумму первых 60 членов.

2. Последовательность 3, – 9, 27, – 81, ... — геометрическая прогрессия. Определите ее n-й член и сумму первых восьми членов.

3. Найдите знаменатель возрастающей геометрической прогрессии, если ее четвертый, пятый и седьмой члены образуют арифметическую прогрессию.

Глава XII

ЭЛЕМЕНТЫ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

§ 63. Математическое моделирование

Математическими методами решают не только абстрактные математические задачи о числах, фигурах, уравнениях, функциях и т. д., но и многие *прикладные задачи*. *Прикладными задачами* в математике называют задачи, условия которых содержат нематематические понятия. Решая прикладную задачу математическими методами сначала создают ее *математическую модель*.

Задача 1. Найдите площадь поверхности стола, ширина и длина которого равны 67 см и 125 см.

Р е ш е н и е. Поверхность стола имеет форму прямоугольника. Чтобы найти площадь прямоугольника, нужно его длину умножить на ширину. Следовательно, искомая площадь $S = 125 \cdot 67 = 8375$ (см^2).

О т в е т. $S \approx 84$ дм^2.

Данная задача прикладная, поскольку в ней говорится о столе — нематематическое понятие. Решая задачу, мы заменили ее другой: вместо поверхности стола рассмотрели прямоугольник. Задача нахождения площади прямоугольника — модель данной прикладной задачи.

Задача 2. В сосуде имеется 10,5 кг 40-процентного раствора серной кислоты. Сколько нужно влить в сосуд

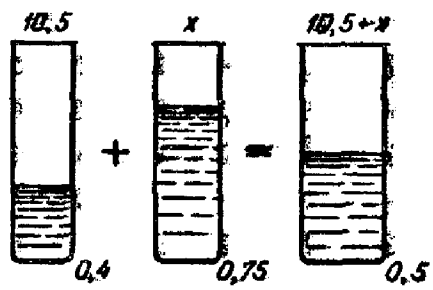


Рис. 105

75-процентного раствора той же кислоты, чтобы получить 50-процентный раствор?

Р е ш е н и е. Сначала в сосуде было $0{,}4 \cdot 10{,}5$ кг чистой кислоты (рис. 105). Если долить к ней x кг 75-процентного раствора, масса чистой кислоты в сосуде увеличится на $0{,}75x$ кг. В результате станет $(10{,}5 + x)$ кг 50-процентного раствора, т. е. $0{,}5\,(10{,}5 + x)$ кг чистой кислоты. Имеем уравнение:

$$0{,}4 \cdot 10{,}5 + 0{,}75x = 0{,}5\,(10{,}5 + x), \qquad (*)$$

корень которого $x = 4{,}2$.

О т в е т. 4,2 кг.

Эта задача также прикладная, поскольку сосуд, растворы серной кислоты — не математические понятия. Уравнение (*) — математическая модель данной задачи.

Моделью называется специально созданный объект, отображающий свойства исследуемого объекта (*modèle* — копия, образец). Уменьшенные модели самолета, плотины, автомобиля — примеры физических моделей. *Математические модели* создают, используя математические понятия и отношения: геометрические фигуры, числа, выражения и т. п. Математическими моделями в большинстве случаев бывают функции, уравнения, неравенства, их системы.

Решение прикладной задачи математическими методами осуществляется в три этапа:

1) создание математической модели данной задачи;
2) решение соответствующей математической задачи;
3) анализ ответа.

Схематически эти этапы изображены на рисунке 106. Здесь A — данная прикладная задача, B — ее математическая модель, C — ответ для модели, D — ответ для данной прикладной задачи A. Переход от A к B — процесс *моделирования*, создание нужной модели. Чтобы создать соответствующую модель, нужно знать не только математику, но и ту

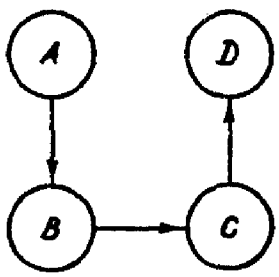


Рис. 106

отрасль науки или производства, с которой связана данная прикладная задача. Если модель составлена неправильно, неправильным будут и решение задачи, и ответ. Допустим, что в задаче 2 вместо 10,5 кг дано 10,5 л. Если и для такой задачи ученик составит уравнение (*) и найдет ответ 4,2 л, он допустит грубую ошибку (почему?).

Важным является также последний этап решения прикладной задачи: анализ ответа. Ответ C для абстрактной задачи B может не удовлетворять данной задаче A, или удовлетворять ей не полностью. Ответ C может быть точным для задачи B, ответ для прикладной задачи A почти всегда может быть только приближенным. Поэтому его следует записывать соответственно с правилами приближенных вычислений.

Создайте математические модели для задач 277 — 288.

277. Найдите объем кирпича, размеры которого $250 \times 120 \times 65$ мм.

278. Корова привязана на лугу к колышку веревкой, длина которой 8 м. Какую площадь она выпасает?

279. Чтобы поднять ведро из колодца, нужно сделать 12 оборотов ворота. Найдите глубину колодца, если диаметр вала ворота 24 см.

280. Рессора состоит из десяти стальных полос (рис. 107). Длина верхней полосы 105 см, а каждая следующая на 9 см короче предыдущей. Найдите сумму длин всех полос рессоры.

281. Проволоку длиной 90 м разрезали на два куска так, что второй оказался на 12% короче первого. Найдите длины этих кусков.

282. Имеется 10-процентный и 15-процентный растворы соли. Сколько нужно взять каждого раствора, чтобы получить 40 граммов 12-процентного раствора?

Рис. 107

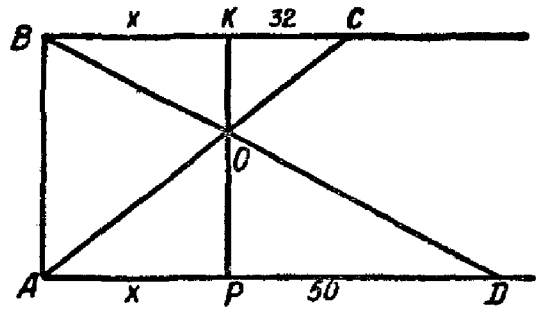


Рис. 108

283. Два кузнеца, работая вместе, выполняют определенную работу за 8 дней. За сколько дней выполнил бы эту работу второй кузнец, если первый может выполнить ее за 12 дней?

284. а) Одна бригада может выполнить работу за 3 ч, вторая — за 5 ч. За сколько часов выполнили бы эту работу обе бригады вместе?

б) Одной из двух труб бассейн можно наполнить за 3 ч, а второй — за 5 ч. За сколько часов наполнится бассейн, если открыть обе трубы?

в) От станции A до B и от B до A одновременно выехали два автомобиля. Через сколько часов они встретятся, если известно, что первый автомобиль расстояние AB проходит за 3 ч, а второй — за 5 ч?

285. Катер за 4 ч прошел 24 км по течению реки и 20 км против течения. Найдите скорость течения, если собственная скорость катера равна 12 км/ч.

286. Из городов A и B выехали одновременно навстречу друг другу два автомобиля. Первый приехал в B через 32 мин, второй в A — через 5 мин после встречи. Сколько минут они ехали до встречи?

Р е ш е н и е. Пусть AC и BD — графики движения первого и второго автомобилей (рис. 108). Если каждый из них ехал до встречи x мин, т. е. $AP = BK = x$, то $KC = 32$, $PD = 50$. $\Delta AOP \sim \Delta COK$ и $\Delta POD \sim \Delta KOB$, поэтому

$$\frac{AP}{KC} = \frac{OP}{OK} = \frac{PD}{BK}.$$

Следовательно, $\frac{x}{32} = \frac{50}{x}$, откуда $x = 40$.

О т в е т. 40 мин.

Одной из математических моделей данной задачи является система графиков, изображенная на рисунке 108, другой — уравнение $x : 32 = 50 : x$. Попробуйте создать другие ее математические модели.

287. Из порта одновременно вышли два теплохода: один на юг, другой на запад. Через два часа расстояние между ними составляло 60 км. Найдите скорость теплоходов, если разность их скоростей 6 км/ч.

288. Из пункта A одновременно и в одном направлении выехали два велосипедиста; скорость первого 24 км/ч, а второго — 18 км/ч. Через час из A выехал автомобиль, который догнал сначала второго велосипедиста, а спустя 10 мин и первого. Найдите скорость автомобиля.

§ 64. Приближенные вычисления

Можно ли измерить длину рейки абсолютно точно? Нет. Даже если услышите, что длина какой-нибудь рейки равна, например, 9,42783 м, не верьте этому. Ведь длину такой рейки с точностью до сотой доли миллиметра измерить нельзя. Результат каждого измерения — приближенное значение величины.

Если, измеряя длину x какой-нибудь рейки, обнаружим, что она больше 6,427 м и меньше 6,429 м, то записывают:

$$x = 6{,}428 \pm 0{,}001\text{м}.$$

Говорят, что значение длины рейки найдено с точностью до 0,001 м (одного миллиметра), или что абсолютная погрешность приближенного значения 6,428 не превышает 0,001.

Абсолютной погрешностью приближенного значения называют модуль разности точного и приближенного значений.

Если точное значение величины неизвестно, то неизвестна и абсолютная погрешность ее приближенного значения. В таком случае указывают *границу абсолютной погрешности* — число, которого не превышает абсолютная погрешность. В рассмотренном примере

граница абсолютной погрешности приближенного значения 6,428 равна 0,001. Здесь цифры 6, 4 и 2 точные, а 8 сомнительная, от точной цифры она отличается не более, чем на единицу.

Если $x = 3{,}274 \pm 0{,}002$, т. е. $3{,}272 < x < 3{,}276$, то граница абсолютной погрешности приближенного значения 3,274 равна 0,002.

Приближенные значения можно записывать и без границ погрешностей. При этом договорились записывать их так, чтобы все их цифры, кроме последней, были верными, а остальные (сомнительные) отличались от верных не более, чем на единицу. Например, когда пишут $x = 6{,}428$ м, то понимают, что $x = 6{,}428 \pm 0{,}001$ м.

Если $y = 3{,}247 \pm 0{,}002$ кг, то писать $y = 3{,}247$ кг не принято. Такой результат желательно округлить: $y = 3{,}25$ кг.

Действия над приближенными значениями можно выполнять с *точным учетом* погрешностей и без точного учета погрешностей. Точно учитывать погрешности можно на основании свойств двойных числовых неравенств. Пусть, например, масса болта в граммах $x = 325 \pm 2$, а масса гайки $y = 117 \pm 1$, т. е. $323 < x < 327$ и $116 < y < 118$. Сложив почленно эти двойные неравенства, получим:

$$439 < x + y < 445, \text{ или } x + y = 442 \pm 3.$$

Аналогично можно выполнять и другие действия над приближенными значениями. Делают это в наиболее ответственных вычислениях.

В менее ответственных случаях пользуются *правилами подсчета цифр*.

Напомним, что *десятичными знаками* числа называют все его цифры, стоящие справа от десятичной запятой. *Значащими цифрами* числа называют все его цифры, кроме нулей слева и нулей справа, стоящих на местах цифр, замененных при округлении. Например, в приближенном значении 0,03074 пять десятичных знаков и четыре значащие цифры: 3, 0, 7, 4. А в приближенном значении диаметра Земли $d = 12700$ км десятичных знаков нет, а значащих цифр три: 1, 2 и 7.

Пусть даны приближенные значения $x = 3{,}24$ и $y = 1{,}4$. Обозначим первые отброшенные при округлении их цифры знаками ? : $x = 3{,}24?$, $y = 1{,}4?$. Найдем сумму и разность этих приближенных значений:

$$\begin{array}{r} 3{,}24? \\ +\ 1{,}4? \\ \hline 4{,}6?? \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3{,}24? \\ -\ 1{,}4? \\ \hline 1{,}8?? \end{array}$$

Как видим, ***при сложении и вычитании приближенных значений в результате следует оставлять столько десятичных знаков, сколько их имеет компонент действия с наименьшим числом десятичных знаков.***

Перемножим данные приближенные значения:

$$\begin{array}{r} \times\ 3{,}24? \\ \underline{\quad 1{,}4? \quad} \\ ???? \\ +\ 1296? \\ \underline{\quad 324? \quad} \\ 4{,}5???? \end{array}$$

Из рассмотренного примера видно, что ***при умножении приближенных значений в результате следует сохранять столько значащих цифр, сколько их имеет множитель с наименьшим числом значащих цифр***. Подобным правилом пользуются и при делении приближенных значений.

Выделенные жирным шрифтом правила называют *правилами подсчета цифр*. Они не обеспечивают высокой точности приближенных вычислений, но вполне достаточны для большинства прикладных задач.

289. Округлите число:

а) 37,2539 с точностью до сотых;

б) 0,02578 с точностью до тысячных;

в) 6 548 371 с точностью до тысяч.

290. Известно, что $m = 3{,}7 \pm 0{,}1$. Запишите значение m в виде двойного неравенства.

291. Толщина книги $m = 35 \pm 1$ мм. Назовите приближенное значение толщины книги и границу его абсолютной погрешности.

292. Масса яблока больше 310 г и меньше 320 г. Назовите приближенное значение массы яблока и границу абсолютной погрешности.

293. Преобразовав число $\frac{1}{3}$ в десятичную дробь, нашли его приближенное значение 0,333. Найдите абсолютную погрешность.

294. Верно ли, что:

а) $\frac{1}{3} = 0{,}33 \pm 0{,}01$; б) $\frac{1}{3} = 0{,}33 \pm 0{,}002$;

в) $\frac{1}{6} = 0{,}166 \pm 0{,}001$; г) $\frac{1}{6} = 0{,}166 \pm 0{,}0005$?

295. Назовите десятичные знаки в числах: 2,325; 0,007; 20,7.

296. Сколько значащих цифр имеют числа: 327; 1,005; 0,028; 1001?

297. Приближенные значения диаметров Солнца, Венеры и Марса равны соответственно 1 391 000, 12 400 и 6 780 км. Назовите значащие цифры этих приближенных значений.

298. Найдите (с точным учетом погрешностей) разность приближенных значений $x = 1{,}52 \pm 0{,}01$ и $y = 0{,}27 \pm 0{,}02$.

Р е ш е н и е. Данным приближенным значениям соответствуют двойные неравенства

$$1{,}51 < x < 1{,}53 \text{ и } 0{,}25 < y < 0{,}29.$$

Умножим все части последнего двойного неравенства на -1, получим

$$-0{,}29 < -y < -0{,}25.$$

Прибавив это двойное неравенство к первому, получим

$$1{,}22 < x - y < 1{,}28,$$

или

$$x - y = 1{,}25 \pm 0{,}03.$$

299. Найдите (с точным учетом погрешностей) сум-

му, разность, произведение и частное приближенных значений $a = 3{,}24 \pm 0{,}02$ и $b = 1{,}17 \pm 0{,}03$.

300. Известно, что $3{,}24 < m < 3{,}25$ и $1{,}73 < n < 1{,}74$. Найдите приближенное значение и границу абсолютной погрешности дроби $\frac{m}{n}$.

301. Сформулируйте правило подсчета цифр для деления приближенных значений. Проиллюстрируйте его на примере.

302. Сформулируйте правило подсчета цифр для возведения приближенного значения в квадрат или куб. Приведите примеры.

303. Найдите по правилам подсчета цифр сумму, разность, произведение и частное приближенных значений $x = 21{,}37$ и $y = 9{,}832$.

304. Решив задачу 278, ученик записал ответ 200,96 м^2. Верный ли это ответ?

305. Используя правила подсчета цифр, решите задачу 279.

306. Даны приближенные значения $a = 2{,}23$ и $b = 3{,}75$. Найдите значение выражения:

а) $a^2 + b$; б) $2a - b$; в) $ab - a^2$.

§ 65. Первые сведения о статистике

Раздел прикладной математики, в котором исследуются количественные характеристики массовых явлений, называется *математической статистикой* (лат. *status* — состояние).

Пример 1. Девятиклассники одной школы написали контрольную работу. Из них 16 выполнили задание на «5», 31 — на «4», 33 — на «3», 7 — на «2». Это количественные характеристики проведенной контрольной работы. Их можно представить в таблице.

Отметки	5	4	3	2
Количество учеников	16	31	33	7

Наглядно изобразить эти данные можно с помощью столбчатой диаграммы (рис. 109).

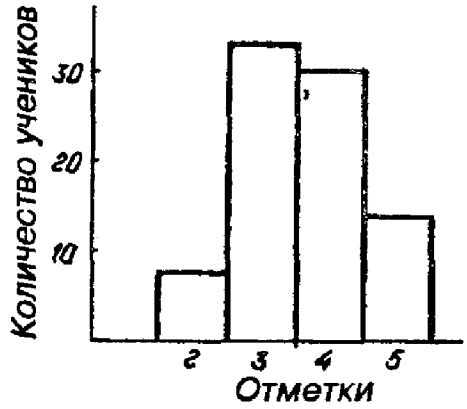


Рис. 109

Столбчатые диаграммы в статистике называют *гистограммами* (гр. *ἱστος* — столб, *γραμμα* — написание).

В рассмотренном примере речь идет о 87 учениках. Все значительно сложнее, если исследуют *массовые явления*, охватывающие тысячи, а то и миллионы исследуемых объектов.

Пример 2. Обувщикам нужно знать, сколько обуви следует выпускать того или иного размера. Как это выяснить? Опросить всех, т. е. десятки миллионов мужчин и женщин, слишком дорого и долго. Поэтому делают *выборку*: опрашивают выборочно всего несколько десятков или сотен людей. Допустим, что, опросив 60 женщин, их размеры обуви записали в таблицу.

23,5	24	23,5	23	24,5	23	22,5	24,5	22,5	23,5	23,5	23,5
25,5	21	24	25	23,5	22	23	24,5	23	24,5	23	24,5
25	24	21,5	23,5	24,5	22,5	22	23,5	26,5	25,5	25	26
24	23	24	24,5	22	24	23,5	21,5	23,5	25	24	22,5
25,5	21,5	24,5	26	25	23,5	22,5	24	23	22,5	24	25

Это — выборка из 60 значений (данных). Для удобства ее группируют в классы (по размерам обуви) и отмечают, сколько значений выборки содержит каждый класс.

Размер обуви	21	21,5	22	22,5	23	23,5	24	24,5	25	25,5	26	26,5
Количество женщин	1	3	3	6	7	10	9	8	6	4	2	1

Такие таблицы называют *частотными*. В них числа второй строки — *частоты*; они показывают, как часто встречаются в выборке те или иные ее значения. *Относительной частотой* значения выборки называют отношение его частоты к числу всех значений выборки. В рассмотренном примере частота размера обуви 24 равна 9, а относительная частота 15%, так как $9 : 60 = 0{,}15 = 15\%$.

По частотной таблице можно построить гистограмму (рис. 110). Она наглядно показывает, какую часть обуви желательно выпускать того или иного размера. Понятно, что полученные таким способом выводы только вероятны, приблизительны. Однако для практических нужд этого достаточно.

Выборки характеризуют *центральными тенденциями*: средним значением, модой и медианой. *Средним значением* выборки называют среднее арифметическое всех ее значений. *Мода выборки* — то ее значение, которое встречается чаще всего. *Медиана выборки* — это число, «разделяющее» пополам упорядоченную совокупность всех значений выборки.

Пусть дана выборка: 1, 3, 2, 4, 5, 2, 3, 4, 1, 6, 4.

Упорядочим ее: 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 6.

Мода данной выборки равна 4, т. к. 4 встречается чаще всего.

Среднее значение выборки

$$\frac{1+1+2+2+3+3+4+4+4+5+6}{11} = \frac{35}{11}.$$

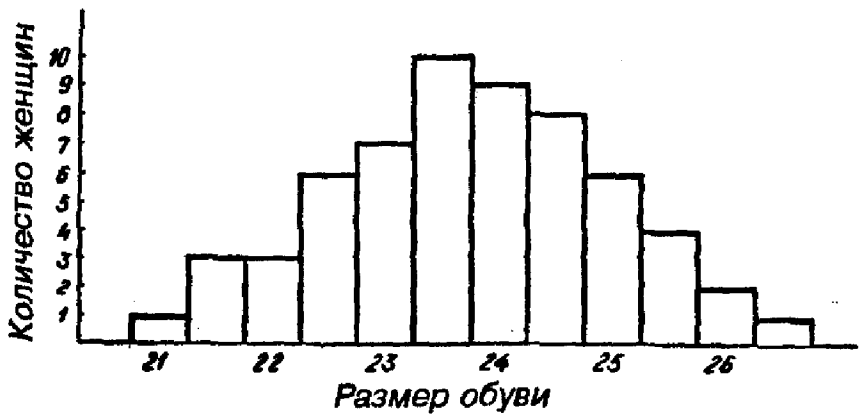


Рис. 110

Медиана данной выборки равна 3, поскольку число 3 «разделяет» упорядоченную выборку пополам.

Если упорядоченная выборка имеет четное число значений, то ее медиана равна полусумме двух ее средних значений. Например, для выборки 1, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 6, 6, медиана $m = \frac{3+4}{2} = 3{,}5$.

307. По таблице постройте гистограмму распределения учеников класса по годам рождения.

Год рождения	1980	1981	1982	1983
Количество учеников	1	20	3	2

308. Опросив 60 мужчин о размерах их обуви, составили таблицу:

27,5	28	25,5	28	29	28,5	26	28	27,5	29,5	26,5	30,5
26,5	27,5	29,5	27,5	26	30	27,5	27	29	27	28,5	27,5
29,5	25,5	27	28,5	28	27	28	25	26	28	30	27
27	28,5	29	26	26,5	28,5	26,5	27,5	28	29,5	26,5	29
28	27,5	28,5	27,5	29	27	28	29	27	26,5	28,5	27,5

Составьте частотную таблицу и постройте соответствующую гистограмму. Определите частоту и относительную частоту каждого ее значения.

309. Даны 50 чисел: из них число 2 встречается 10 раз, число 3 — 20 раз и число 5 — 20 раз. Найдите их среднее арифметическое.

310. Чему равно среднее арифметическое первых 99 натуральных чисел?

311. Найдите моду, медиану и среднее значение выборки:

а) 2, 3, 4, 4, 6, 6, 6, 7, 7, 8;

б) 12, 17, 11, 13, 14, 15, 15, 16, 13, 13.

312. Найдите центральные тенденции выборки:

а) 1,5; 1,6; 1,2; 2,1; 2,4; 2,7; 2,8; 3,0; 3,0; 3,0; 3,1; 3,1; 3,1; 3,4.

б) 0,95; 0,99; 1,03; 1,06; 0,97; 0,97; 1,0; 1,01; 0,98; 0,97; 0,99; 0,96; 1,02; 0,97; 1,0.

313. За решение задач пять участников олимпиады получили от 0 до 3 баллов, десять — от 4 до 6, тридцать — от 7 до 9, сорок четыре — от 10 до 12, шестнадцать — от 13 до 15, десять — от 16 до 18, два — от 19 до 21, три — от 22 до 24 баллов. Составьте частотную таблицу, постройте гистограмму и определите центральные тенденции.

314. Пекарня выпекает килограммовые калачи. Проверка показала, что масса трех из ста калачей меньше 1 кг на 31—40 г, пятнадцати — на 21—30 г, двадцати — на 11—20 г, тридцати — на 1—10 г; масса семнадцати калачей больше 1 кг на 0—9 г, а двух — на 10—19 г. Постройте соответствующую гистограмму и определите центральные тенденции.

§ 66. Процентные расчеты

Процент — это одна сотая: 1% = 0,01; 50% = 0,5; 100% = 1.

С простейшими задачами на проценты (нахождением процентов от числа, числа по процентам и процентного отношения) вы ознакомились раньше. Вспомните эти виды задач и способы их решения.

В более сложных прикладных задачах на проценты часто речь идет об увеличении или уменьшении величины на несколько процентов. В таких случаях нужно определить, от какого числа находят проценты. Например, когда говорят, что заработная плата увеличилась на 10%, то понимают, что она увеличилась на 10% от предыдущей заработной платы. При этом, если значение x больше y на p %, то значение y меньше x не на p %. Увеличению в 2 раза соответствует увеличение на 100%, а уменьшению в 2 раза — уменьшение на 50% (рис. 111). Цена товара теоретически может увеличиваться на сколько угодно процентов, а уменьшаться, например, на 120 % не может.

Рассмотрим одну из задач на проценты.

Задача. Просушили 55 т зерна 16-процентной влажности, после чего его стало 50 т. Найдите процент влажности просушенного зерна.

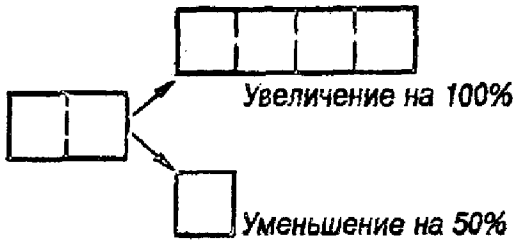


Рис. 111

Р е ш е н и е (рис. 112). Данное зерно сначала имело влаги $0{,}16 \cdot 55 = 8{,}8$ (т).

Испарилось влаги 5 т ($55 - 50 = 5$), поэтому осталось ее в зерне $8{,}8 - 5 = 3{,}8$ (т).

Следовательно, процент влажности просушенного зерна равен $3{,}8 : 50 = 0{,}076 = 7{,}6\ \%$.

О т в е т. 7,6%.

Можно решить задачу иначе, например, составив уравнение

$$0{,}16 \cdot 55 - \frac{x}{100} \cdot 50 = 5.$$

Часто приходится решать задачи на проценты бухгалтерам и работникам банков. Рассмотрим для примера задачи, связанные с начислением процентных денег.

Допустим, что вкладчик дал сбербанку под 5% годовых 1000 марок. Это — *начальный капитал*. Через год банк насчитает вкладчику за это 50 марок *процентных денег* (5% от 1000 марок). После этого на счету вкладчика станет 1050 марок, поскольку $1000(1+0{,}05) = 1050$. За второй год процентных денег ему насчитают уже 5% от 1050 марок; наращенный капитал вкладчика после двух лет будет равен $1000\ (1 + 0{,}05)^2$ марок. Понятно, что через n лет *наращенный капитал* будет равен $1000\ (1 + 0{,}05)^n$ марок.

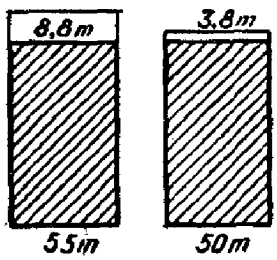


Рис. 112

Вообще, вложенный в сбербанк начальный капитал A_0 под p % годовых через n лет превратится в наращенный капитал.

$$A_n = A_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n.$$

Это — *формула сложных процентов*. По этой формуле можно решать также задачи, не связанные с наращением капитала (см. задачу 338).

Процентные деньги за неполный год насчитывают пропорционально числу дней. Например, если 350 грн., отданные под 2% годовых, были в банке 183 дня, т. е. $\frac{1}{2}$ года, то за это вкладчик получит $\frac{1}{2} \cdot 350 \cdot 0{,}02$ (грн.). Наращенный капитал будет равен 353,5 грн.

Подобные понятию процента промилль и проба.

Промилль — это одна тысячная ($1‰ = 0{,}001$). Например, пятипромиллльный раствор соли — это раствор, в 1000 г которого содержится 5 г соли.

Пробами характеризуют сплавы драгоценных металлов. Так, золото 875-й пробы — это сплав, в 1000 г которого содержится 875 г чистого золота.

315. Сколько соли растворено в 10 кг семипроцентного раствора?

316. Из 25 учеников класса на уроке присутствует 23. Найдите процент посещения.

317. Из молока выходит 10 % сыра. Сколько нужно молока, чтобы получить 20 кг сыра?

318. Из сахарной свеклы получается 12 % сахара. Сколько нужно переработать свеклы, чтобы вышла 1 т сахара?

319. Площадь поверхности Земли 510,1 млн. кв. км, из них 149,2 млн. кв. км — суша. Сколько процентов поверхности Земли покрыто водой?

320. Латунь — сплав 60% меди и 40% цинка. Сколько меди и цинка нужно сплавить, чтобы вышло 500 т латуни?

321. Бронза — сплав меди и олова. Сколько процентов меди в бронзовом слитке, содержащем 17 кг меди и 3 кг олова?

322. Раньше 3 кг мяса стоили столько, сколько сейчас стоят 2 кг. На сколько процентов подорожало мясо?

323. Из молока получается 25% сливок, а из сливок — 20% масла. Сколько нужно молока, чтобы получить 10 кг масла?

324. Руда содержит 60% железа, из нее выплавляют чугун, содержащий 98% железа. Из скольких тонн руды выплавляют 1000 т чугуна?

325. Яблоки в результате сушки теряют 84% своей массы. Сколько свежих яблок нужно высушить, чтобы получить 40 кг сушеных?

326. В одном мешке муки на 25% больше, чем в другом. На сколько процентов во втором мешке муки меньше, чем в первом?

327. Цена товара сначала снизилась на 10%, а потом еще раз на 10%. На сколько процентов изменилась она после двух переоценок?

328. Цена автомобиля сначала увеличилась на 20%, а потом снизилась на 20%. Как изменилась цена автомобиля после этих двух переоценок?

329. Завод увеличил выпуск продукции за первый год на 20%, а за второй — на 25%. Как вырос выпуск продукции на заводе за эти два года?

330. Объем работ на строительстве увеличился на 50%, а продуктивность труда — на 20%. Как изменилось количество рабочих?

331. К 8 кг 70-процентного раствора кислоты долили 2 кг воды. Определите процентную концентрацию нового раствора.

332. Сколько нужно смешать 10-процентного и 15-процентного растворов соли, чтобы получить 1 кг 12-процентного раствора?

333. Влажность свежих грибов равна 99%. Когда грибы подсушили, их влажность снизилась до 98%. Как изменилась масса грибов?

334. Вкладчик положил в банк 20 000 грн. под 7% годовых. Какие процентные деньги он будет иметь через 5 лет?

335. Сколько денег нужно положить в банк под 3% годовых, чтобы через 3 года получить больше 3 000 грн.?

336. Через сколько лет капитал, вложенный в банк под 5% годовых, увеличится в два раза?

337. Говорят, что в 1723 г. гетьман Полуботок положил в английский банк большой капитал из Украины под 4% годовых. Во сколько раз увеличился бы тот капитал до наших дней?

338. Ежегодно население Земли увеличивается приблизительно на 2%. Сколько людей будет жить в 2000 г., если в 1990 г. их было 5,2 млрд. человек?

339. Сколько воды нужно долить к 10 кг 5-промиллльного раствора соли, чтобы получить 3-промиллльный раствор?

340. Сколько нужно смешать 2-промиллльного и 10-промиллльного растворов соли, чтобы получить 800 г 7-промиллльного раствора?

341. Сколько золота 375-й пробы нужно сплавить с 30 г золота 750-й пробы, чтобы получить сплав золота 500-й пробы?

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Вариант 1

1. Найдите с точным учетом погрешностей сумму, разность, произведение и частное приближенных значений $x = 2{,}37 \pm 0{,}01$ и $y = 1{,}02 \pm 0{,}01$.

2. Дана выборка: 7, 5, 4, 6, 3, 4, 7, 3, 8, 5, 5, 6, 6, 6. Найдите ее моду, медиану и среднее значение. Постройте соответствующую гистограмму.

3. Цена изделия сначала возросла на 10%, а затем снизилась на 20%. Как и на сколько процентов изменилась цена в результате этих двух переоценок?

Вариант 2

1. Найдите с точным учетом погрешностей сумму, разность, произведение и частное приближенных значений $a = 5{,}23 \pm 0{,}01$ и $c = 3{,}12 \pm 0{,}01$.

2. Дана выборка: 1, 1, 3, 3, 5, 4, 4, 2, 3, 6, 3, 4, 5, 6, 7. Найдите ее моду, медиану и среднее значение. Постройте соответствующую гистограмму.

3. Вкладчик положил в банк 1000 грн. под 7% годовых. Сколько процентных денег ему должны насчитать через 3 года?

Вариант 3

1. Найдите с точным учетом погрешностей сумму, разность, произведение и частное приближенных значений $x = 8{,}53 \pm 0{,}01$ и $z = 3{,}02 \pm 0{,}01$.

2. Дана выборка: 3, 2, 3, 5, 4, 7, 6, 3, 4, 5, 5, 4, 6, 3. Найдите ее моду, медиану и среднее значение. Постройте соответствующую гистограмму.

3. Сколько нужно смешать 10-процентного и 30-процентного растворов кислоты, чтобы получить 8 кг 15-процентного раствора?

Вариант 4

1. Найдите с точным учетом погрешностей сумму, разность, произведение и частное приближенных значений $a = 6{,}25 \pm 0{,}01$ и $b = 2{,}12 \pm 0{,}01$.

2. Дана выборка: 6, 5, 8, 4, 8, 9, 7, 5, 5, 7, 6, 7, 7, 6. Найдите ее моду, медиану и среднее значение. Постройте соответствующую гистограмму.

3. Цена изделия сначала снизилась на 20%, а затем возросла на 10%. Как и на сколько процентов изменилась цена в результате этих двух переоценок?

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ (ИТОГОВОЙ)

Вариант 1

1. Упростите выражение $\left(\frac{1}{\sqrt{x}-2} - \frac{1}{\sqrt{x}+2}\right) \cdot \frac{x-4}{2x-1} - \frac{2}{x}$ и найдите его числовое значение при $x = 0{,}25$.

2. Решите неравенство $\frac{1}{x}(6 - x) < 2$.

3. Постройте график функции $y = x^2 - 4x + 3$. Найдите ее область определения и множество значений. На каком промежутке функция возрастает, на каком принимает отрицательные значения?

4. Бригада должна была засеять 120 га за определенное время. Но перевыполняя норму на 10 га ежедневно, она закончила сев на 2 дня раньше. Сколько гектаров засевала бригада ежедневно?

Вариант 2

1. Упростите выражение $\left(\frac{\sqrt{x}}{x-2,5}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right):\frac{\sqrt{x}}{x-1}-\frac{1}{x}$ и найдите его числовое значение при $x=7,5$.

2. Решите неравенство $x^2-10\leqslant 3x$.

3. Постройте график функции $y=6x-x^2$. Найдите ее область определения и множество значений. На каком промежутке функция убывает, на каком принимает отрицательные значения?

4. Туристы должны были пройти расстояние 18 км за определенное время. Поскольку их скорость была на 0,5 км/ч больше, то прошли они намеченное расстояние на полчаса быстрее. С какой скоростью шли туристы?

Вариант 3

1. Упростите выражение $\left(\frac{x^2+9}{x}-6\right)\cdot\frac{x\sqrt{x}}{x-3}+3\sqrt{x}$ и найдите его числовое значение при $x=0,04$.

2. Решите неравенство $x^2-7\geqslant 6x$.

3. Постройте график функции $y=-x^2-6x$. Найдите ее область определения и множество значений. На каких промежутках функция возрастает, на каких ее значения отрицательны?

4. Катер прошел по течению 90 км за такое же время, за какое проходил 70 км против течения реки. Какое расстояние по этой реке за такое же время проплыл бы плот?

Вариант 4

1. Упростите выражение $\left(4+\frac{x^2}{x+1}\right)\cdot\frac{\sqrt{x}}{x+2}-\sqrt{x}$ и найдите его числовое значение при $x=2,25$.

2. Решите неравенство $\frac{1}{x}(4+x)<3$.

3. Постройте график функции $y=x^2+2x-3$. Найдите ее область определения и множество значений. На каком промежутке функция возрастает? При каком значении x она имеет наименьшее значение?

4. На перегоне 400 км, пройдя четверть пути, поезд

задержался на 1 ч. Чтобы прибыть на конечную станцию вовремя, машинист увеличил скорость на 10 км/ч. Сколько часов поезд был в дороге?

Задачи повышенной трудности

342. Что больше: $\sqrt{14} + \sqrt{6}$ или $2\sqrt{3} + \sqrt{7}$?

343. Докажите неравенство

$4 < \sqrt{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt{9 - 4\sqrt{5}} < 5.$

344. Докажите, что при любых значениях a, b, c:

а) $2a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 2a\,(b + c)$;

б) $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 2\,(a + 2b + 3c - 7)$.

345. Докажите, что при любых значениях x, y:

а) $x^4 + y^4 \geqslant x^3y + xy^3$;

б) $2x^2 + 5y^2 - 4xy - 2x - 4y + 5 > 0$.

346. Докажите, что при любом значении a:

а) $a^4 - 2a^3 - a^2 + 2a + 1 \geqslant 0$;

б) $a^4 - 3a^2 - 2a + 5 > 0$.

347. Докажите, что при любых значениях a, b, c, d:

а) $(a^2 + b^2)\,(c^2 + d^2) \geqslant 4abcd$;

б) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geqslant (a + b)\,(c + d)$.

348. Докажите, что $x^2 + y^2 \geqslant \frac{1}{2}$ при $x + y = 1$;

$x^2 + y^2 \geqslant \frac{1}{5}$ при $x + 2y = 1$.

349. Решите неравенство:

а) $\frac{x^2 + 4}{x - 4} < x$;

б) $\frac{x^2 + x + 1}{3x^2 + 4x - 4} < 1$;

в) $\frac{4x}{3 - x} < x - 1$;

г) $\frac{x + 4}{x + 1} > 2 - x$;

д) $(x + 3)^2\,(x + 5)\,(x - 2) < 0$;

е) $(8 - x)^5\,(x + 8)^2\,(x + 4) \leqslant 0$.

350. Покажите, что неравенства $\sqrt{x - 6} + \sqrt{x - 1} > 1$ и $\sqrt{x - 6} + \sqrt{x - 1} > 2$ имеют одинаковые множества решений.

351. Постройте график функции:

а) $y = |x - 3|$; б) $y = |x + 2|$;

в) $y = 3 - |x|$; г) $y = \frac{1}{|x|}$;

д) $y = \frac{x}{|x|}$; е) $y = x|x|$.

352. Постройте график уравнения:

а) $x^2 + xy = 0$; б) $(x + 1)(y - 3) = 0$;

в) $(xy - 6)(y - 3) = 0$.

353. Запишите функцию $y = \sqrt{x^2 + 2\sqrt{2}x + 2} + \sqrt{x^2 - 2\sqrt{2}x + 2}$, упростив формулу. Постройте ее график.

354. Постройте график функции:

а) $y = |2x - 3|$; б) $y = 2|x| - 3$;

в) $y = 2|x - 3|$; г) $y = |x^2 - 6x + 5|$;

д) $y = x^2 - 6|x| + 5$; е) $y = |x^2 - 6x| + 5$.

355. Сколько решений имеет уравнение $|x^2 - 6x + 5| = a$ при a равном -2, 0, 2, 4, 6?

356. Решите неравенство:

а) $|x - 1| + |x - 5| \geqslant 6$;

б) $|x - 1| + |x - 5| < 6$;

в) $|x - 1| + |x - 5| < 3$.

357. З а д а ч а и з е г и п е т с к о г о п а п и р у с а. Раздели 10 мер хлеба на 10 человек так, чтобы каждый получил на $\frac{1}{8}$ меры больше, чем предыдущий.

358. Д р е в н е г р е ч е с к а я з а д а ч а. Докажите, что в арифметической прогрессии с четным числом членов сумма членов одной половины больше суммы остальных членов на число, кратное квадрату половины числа членов.

359. С т а р и н н а я з а д а ч а. Служивому воину дали награду: за первую рану 1 к., за вторую — 2 к., за третью — 4 к. и т. д., а всего 655 руб. 35 к. Сколько ран имел тот воин?

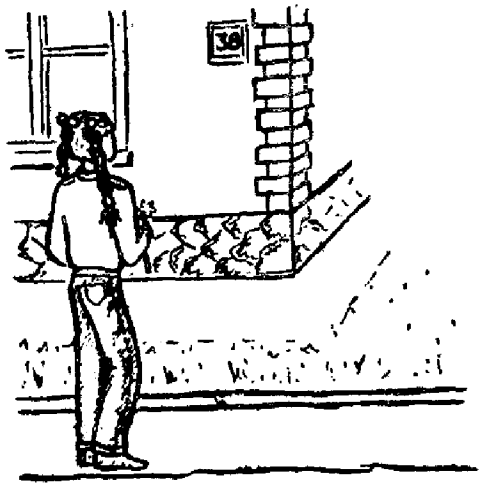


Рис. 113

360. На незнакомой улице вы ищете дом 46, а видите дом 38 (рис. 113). В какую сторону вам нужно идти?

361. Старинная китайская задача. Рысак и кляча бегут от Чаньаня до княжества Ци, что за 3000 ли от Чаньаня. В первый день рысак пробегает 193 ли, а в каждый последующий день на 13 ли больше предыдущего. Кляча в первый день пробегает 97 ли, а каждый следующий на полли меньше, чем предыдущий. Рысак, добежав до Ци, повернул назад. Через сколько дней он встретил клячу?

362. Длины сторон прямоугольного треугольника — последовательные члены арифметической прогрессии. Найдите отношение катетов этого треугольника.

363. Найдите числа x, y и z такие, чтобы последовательность 2, x, y, z, 9 была арифметической прогрессией.

364. Найдите сумму натуральных чисел, меньших 1000, которые: а) делятся на 7; б) взаимно простые с числом 7; в) делятся на 3 и не делятся на 6.

365. $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ — первые n членов геометрической прогрессии со знаменателем q. Найдите сумму $a_1^n + a_2^n + a_3^n + \ldots + a_n^n$.

366. $q, q^2, q^3, q^4, \ldots$ — бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. Найдите сумму $q + 2q^2 + 3q^3 + 4q^4 + \ldots$.

367. Найдите бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, если сумма ее членов равна 4, а сумма кубов ее членов 192.

368. Второй, первый и третий члены арифметической прогрессии являются последовательными членами геометрической прогрессии. Найдите ее знаменатель.

369. a, b, c — последовательные члены арифметической прогрессии. Докажите, что числа $a^2 + ab + b^2$, $a^2 + ac + c^2$, $b^2 + bc + c^2$ также последовательные члены арифметической прогрессии.

370. Подберите формулу n-го члена последовательности:

а) 1, 2, 1, 2, 1, 2, ...; б) $-1, 2, -3, 4, -5, \ldots$.

371. Найдите сумму:

а) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1)$;

б) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 8 + \ldots + n(3n-1)$.

372. При каждом ли натуральном значении n $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2$?

373. Сумма первых n членов арифметической прогрессии равна $2n^2 + n$. Найдите ее.

374. З а д а ч а Н ь ю т о н а. Один коммерсант ежегодно увеличивает свой капитал, уменьшенный на 100 фунтов, которые ежегодно он тратит на семью. Через три года его капитал удвоился. Сколько денег он имел сначала?

375. Решите кроссворд (рис. 114).

П о г о р и з о н т а л и: 1. Известный украинский математик. 3. Сотая часть. 5. Нота. 6. Единица электрического сопротивления. 7. Выражение, позволяющее узнать, сколько решений имеет квадратное уравнение. 10. Древнегреческий математик. 11. Прибор для измерения силы. 14. Часть координатной оси. 15. Число. 16. Итальянский математик 17—18 в. 17. Вид числовой последовательности.

П о в е р т и к а л и: 1. График уравнения, имеющий форму сердца. 2. То, что имеет форму квадрата. 3. Награда, премия. 4. Равенство, верное при всех

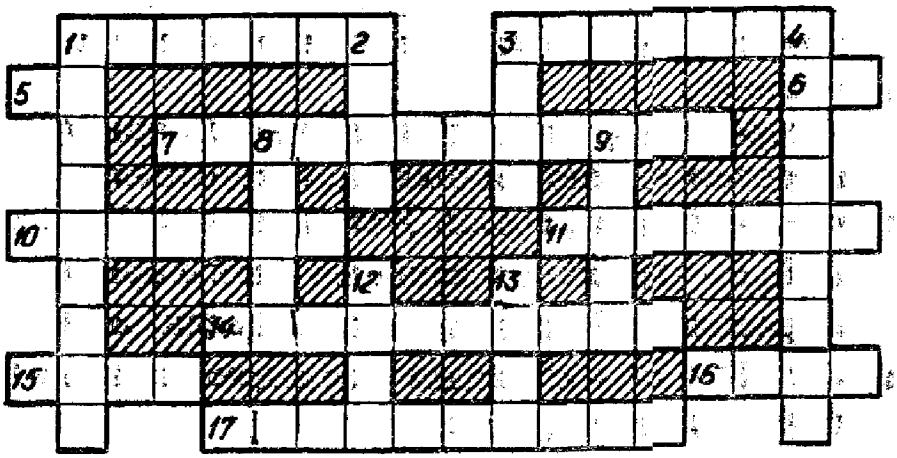


Рис. 114

допустимых значениях переменных. 8. Публичный показ результатов деятельности. 9. Письменное уведомление банка об исполнении операции. 12. Наречие. 13. Цена, по которой покупают ценные бумаги.

Контрольные вопросы

1. Что такое неравенство? Какие бывают неравенства?

2. Сформулируйте основные свойства числовых неравенств.

3. Какие неравенства называют равносильными?

4. Сформулируйте свойства равносильных неравенств.

5. Как решают неравенства; системы неравенств?

6. Сформулируйте определение функции. Что такое аргумент функции?

7. Что такое область определения и область значений функции?

8. Какие функции называют линейными? Каковы их свойства?

9. Назовите важнейшие свойства обратной пропорциональности.

10. Что такое график функции, график уравнения?

11. Каким преобразованием графика функции $y = f(x)$ можно получить графики функций $y = -f(x)$, $y = k \cdot f(x)$, $y = f(x) + m$, $y = f(x - m)$?

12. Сформулируйте свойства квадратичной функции.

13. Чем отличаются графики функций $y = ax^2$ и $y = ax^2 + bx + c$?

14. Сформулируйте определение квадратичного неравенства.

15. Как решают квадратичные неравенства?

16. Какие функции называют возрастающими, убывающими?

17. Какие функции называют четными, нечетными?

18. Приведите примеры степенных функций.

19. Сформулируйте определение арифметической прогрессии.

20. Что называют разностью арифметической прогрессии?

21. Запишите формулу n-го члена арифметической прогрессии.

22. Запишите формулу суммы n первых членов арифметической прогрессии.

23. Сформулируйте определение геометрической прогрессии.

24. Что называют знаменателем геометрической прогрессии?

25. Запишите формулу n-го члена геометрической прогрессии.

26. Запишите формулу суммы n первых членов геометрической прогрессии.

27. Как находят сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии?

28. Из каких этапов состоит решение прикладной задачи?

29. Приведите примеры математических моделей.

30. Что такое абсолютная погрешность; граница абсолютной погрешности?

31. Как выполняют приближенные вычисления с точным учетом погрешностей?

32. Сформулируйте правила подсчета цифр.

33. Что такое математическая статистика?

34. Что такое гистограмма? Приведите примеры.

35. Что такое выборка? Частота выборки?

36. Перечислите центральные тенденции выборки.

37. Что такое мода, медиана, среднее значение выборки?

38. Что такое процент, промилль, проба?

39. Что такое процентные деньги, наращенный капитал?

40. Запишите формулу сложных процентов.

Исторические сведения

Уравнения первой степени с одной переменной ученые умели решать очень давно. Египетские жрецы почти 4 тысячи лет тому назад искомое неизвестное число называли «хау» (в переводе — «куча») и обозначали специальным знаком. В папирусе, дошедшем до нас, есть такая задача.

Куча и ее седьмая часть составляют 19. Найдите кучу.

Сейчас эту задачу мы бы сформулировали так. Сумма *неизвестного числа и его седьмой части* равна 19. Найдите неизвестное число. Задача сводится к уравнению $x + \frac{1}{7}x = 19$.

Подобные задачи умели решать ученые Древней Греции, Индии, Китая. Древнегреческий математик Диофант (III в. н. э.) решал и более сложные уравнения, в частности, такие: $12x^2 + x = 1$, $630x^2 + 73x = 6$.

Системы линейных уравнений китайские математики умели решать более 2000 лет тому назад. И не только с двумя переменными.

Диофант решал и **системы нелинейных уравнений**. Вот одна из его задач. Найдите два числа, если их сумма равна 20, а сумма их квадратов 208.

Выражения с переменными возникли тогда, когда числа стали обозначать не только цифрами, но и буквами. Зачатки таких обозначений встречаются у Диофанта. Переменные, которые теперь принято обозначать степенями x, x^2 и x^3, он обозначал символами σ', δ^{ν} и ω^{ν}. Коэффициенты писал после буквенных множителей, знак сложения опускал. Со-

Ф. Виет (1540—1603)

временным выражениям $5x$ и $x^3 + 5x$ в работах Диофанта соответствуют записи $\sigma' \bar{\varepsilon}$ и $\omega^{\nu}\alpha\ \sigma' \bar{\varepsilon}$.

Обозначения Диофанта не обрели распространения. Даже Мухаммед аль-Хорезми (IX в.) все уравнения записывал словами. Только известный французский математик Ф. Виет (1540—1603), которого называли отцом алгебры, широко использовал буквенные обозначения. Вместо современных x, x^2 и x^3 Виет писал соответственно N, Q, C — первые буквы латинских слов *Numerus* (число), *Quadratuc* (квадрат), *Cubus* (куб). Другие математики придерживались других обозначений.

Первая математическая книга, напечатанная на славянском языке в России, «Арифметика» Л. Магницкого (1703 г.). В ней двучлены, которые сейчас принято писать $2x + 1$ и $3x - 2$, записывались так: $2R + 1$ и $3R \div 2$. Квадрат переменной обозначался буквой q, коэффициент 1 не опускался. Умножать такие выражения рекомендовалось столбиком.

$$\begin{array}{l} 2R + 1 \\ \underline{3R \div 2} \\ 6q + 3R \\ \quad \div 4R \div 2 \\ \hline 6q \div 1R \div 2 \end{array}$$

Степени чисел долгое время не имели специальных обозначений, четвертую степень числа записывали в виде произведения $aaaa$. Только позднее вместо такого произведения писали $a4$, a^{IV}. Записи a^3, a^4, a^5 предложил Р. Декарт (1596—1650).

Формулы сокращенного умножения математикам Древней Греции и Китая были известны за много веков до нашей эры. Записывали их тогда не с помощью букв, а словами, и доказывали геометрически (только для положительных чисел). Пользуясь рисунком, объясняли, что для любых чисел

a и b площадь квадрата со стороной $a + b$ равна сумме площадей двух квадратов со сторонами a и b и двух прямоугольников со сторонами a, b. Следовательно, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Подобным способом обосновывали и другие равенства, теперь называемые формулами сокращенного умножения.

Обыкновенные дроби в Древнем Вавилоне и Египте были известны еще 4 тыс. лет тому назад. Греческие математики умели выполнять над обыкновенными дробями все арифметические действия. В «Арифметике» Диофанта (III в. н. э.) есть также много дробей с переменными. Например, здесь показано, что

$$\frac{96}{x^4 + 36 - 12x^2} - \frac{12}{6 - x^2} = \frac{12x^2 + 24}{x^4 + 36 - 12x^2}.$$

Записывали тогда дробные выражения совсем не так, как теперь.

Дробную черту впервые ввел итальянский математик Л. Фибоначчи (1180—1240).

Дроби с переменными широко стали использовать после появления «Всеобщей арифметики» известного английского ученого И. Ньютона (1643—1727). В этой книге, в частности, объяснялось: «$\frac{a}{b}$ есть величина, возникающая при делении a на b, ... $\frac{ab - bb}{a + x}$ обозначает величину, образованную при делении $ab - bb$ на $a + x$ и т. п. Величины такого рода называются дробями». Тогда вместо b^2 еще писали bb.

Квадратные корни из чисел вавилонские математики умели извлекать еще 4 тыс. лет тому назад. Находили даже приближенные значения квадратных корней, используя правило, которое теперь можно записать (при малых c) в виде такого приближенного равенства:

$$\sqrt{b^2 + c} \approx b + \frac{c}{2b}.$$

Начиная с XIII в. европейские математики предложили сокращенное обозначение корня. Например, вместо современного $\sqrt{12}$ писали $R12$ (латинское

Radix — корень). Со временем вместо R стали писать знак V: V7, V($a + b$). Позднее над многочленом за корнем писали черту: $\sqrt{a + b}$. Р. Декарт соединил знак корня с чертой, после чего запись приобрела современный вид: $\sqrt{a + b}$.

Действительные числа завоевывали свое место в математике довольно долго. Ученые античного мира не допускали и мысли, что кроме целых и дробных, могут существовать еще и какие-то другие числа. Хотя Пифагор (VI в. до н. э.) и его ученики доказали, что если длина стороны квадрата равна 1, то длину его диагонали нельзя выразить никаким рациональным числом. Тем самым они установили существование отрезков, длины которых не выражаются рациональными числами. Все же иррациональных чисел они не ввели.

Математики Индии и Среднего Востока пользовались иррациональными числами, но считали их ненастоящими, неправильными, глухими. Только когда Р. Декарт предложил каждой точке координатной прямой ставить в соответствие число, иррациональные числа пришлось объединить с рациональными в одно множество действительных чисел. Строгую теорию действительных чисел отработали только в XIX в.

Квадратные уравнения более простых видов, системы двух уравнений, одно из которых — квадратное, вавилонские математики умели решать еще 4 тыс. лет тому назад. В Китае и Греции ученые решали уравнения первой степени и их системы, а также квадратные уравнения за 2 тыс. лет до нашего времени. Много внимания уделял квадратным уравнениям Мухаммед аль-Хорезми. Он показал, как решать (при положительных a и b) уравнения видов $x^2 + ax = b$, $x^2 + a = bx$, $ax + b = x^2$.

Отрицательные корни тогда не находили.

Формулы корней квадратного уравнения вывел Франсуа Виет. Теорему, называемую теперь его име-

нем, Виет формулировал так: Если $(B + D)\,A - A^2$ равно BD, то A равно B и равно D.

Г. Лейбниц (1646 —1716)

Функция — одно из наиболее важных понятий современной математики. Оно возникло в XVII веке. Сначала Р. Декарт ввел понятие переменной величины и систему координат, стал рассматривать зависимость ординат точек графика от их абсцисс. Слово «функция» для названия таких зависимостей впервые ввел немецкий математик Г. Лейбниц (1646—1716). Швейцарский математик Л. Эйлер (1707—1783) функцией называл выражение, состоящее из переменной и чисел. Например, выражение $3x + 5$ — функция от переменной x, поскольку значение данного выражения зависит от значений x. Чешский математик Б. Больцано (1781—1848) еще больше расширил понятие функции, он под функцией понимал какую-либо зависимость одной величины от другой. Это понятие усилиями многих математиков уточнялось, расширялось, наполнялось новым смыслом. Самое обобщенное современное его определение предложила в XX в. группа математиков, выступающая под псевдонимом Н. Бурбаки: «Функция — это отношение, при котором каждому элементу области отправления соответствует ровно один элемент области прибытия». Под областью отправления (областью определения функции) и областью прибытия (областью ее значений) понимают любые множества, а не только числовые.

Неравенства. Сравнивать, какое из двух чисел больше, а какое меньше, люди умели много тысячелетий тому назад. В «Началах» Эвклида доказано неравенство, которое теперь принято записывать так: $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$. Только под a и b тогда понимали не любые положительные числа, а длины отрезков; доказательство предлагалось чисто геометрическое и без знаков неравенства.

Знаки $<$ и $>$ впервые ввел английский математик Т. Гарриот в 1631 г., знаки $\leqslant$ и $\geqslant$ введены в XVIII в.

Числовые последовательности. Правила для нахождения суммы членов геометрической прогрессии приведены в «Началах» Евклида. Архимед вывел правила для нахождения суммы квадратов первых n натуральных чисел, умел он также вычислять суммы членов бесконечных убывающих геометрических прогрессий.

В XIII в. итальянский математик Л. Пизанский (Фибоначчи) (1170—1250) исследовал последовательность 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ..., каждый член которой, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих членов. Несколько столетий математики не могли найти ее n-й член. Теперь он известен:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Прикладная математика существует несколько тысячелетий. Ученые Древнего Египта вычисляли площади полей, объемы помещений и т. п. Вся их математика была прикладной. Только в V—IV в. до н. э. в Греции начала создаваться теоретическая (чистая) математика.

Математической статистике, как одному из разделов прикладной математики, положил начало швейцарский математик Я. Бернулли (1654 — 1705). Значительных результатов в ней достиг также известный украинский математик В. Я. Буняковский (1804—1889). Родился он в Баре (ныне Винницкой обл.), учился во Франции, работал в Петербурге. Решал, кроме других математических проблем, важные прикладные задачи, связанные с математической статистикой. Был почетным членом всех университетов Российской Империи, вице-президентом Академии Наук, главным экспертом по вопросам статистики.

В. Я. Буняковский (1804 — 1889)

М. Ф. Кравчук
(1892 — 1942)

Значительный вклад в развитие прикладной математики внес и украинский математик М. Ф. Кравчук (1892—1942). Родился он в с. Човницы (ныне Волынской обл.), закончил Луцкую гимназию, Киевский университет. С 1925 г. профессор, с 1929 г. академик Всеукраинской Академии Наук, ее ученый секретарь, возглавлял Комиссию математической статистики. Кроме фундаментальных теоретических работ, написал несколько учебников по математике для средних и высших школ. В 1938 г. его безосновательно репрессировали. Погиб на Колыме.

П р о ц е н т ы раньше использовали исключительно в денежных расчетах. Давали такое определение: «Процент — это прибыль, получаемая с каждых ста рублей капитала, отданного на определенный срок». Слово «капитал» ввел Л. Пизанский, знак % появился впервые в итальянских работах в XV в. Первую таблицу сложных процентов напечатал нидерландский математик С. Стевин (1548—1620) в XVI в. Он первый в Европе ввел и десятичные дроби.

ТАБЛИЦА КВАДРАТОВ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ОТ 10 ДО 99

ДЕСЯТКИ	ЕДИНИЦЫ									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К УПРАЖНЕНИЯМ

7 класс

1. а) Левая часть $5x+7$, а правая $3x-2$. **2.** а) $21y$, -15, 7 и $2y$. **3.** а) Ни при каком значении x число $x+3$ не может равняться x, так как первое из этих чисел на 3 больше второго. **4.** а) 12; б) 35; в) 6. **5.** а) 5; б) 0; в) -2. **6.** а) $\frac{15}{2}$; б) $-\frac{7}{5}$; в) $\frac{1}{2}$. **9.** 0 и 2. **10.** а) 21; е) -2. **11.** а) 4; г) -24. **12.** 3. **13.** 15. **14.** 12,5. **15.** 315 быков. **16—18.** Равносильны. **19.** а) Равносильны; б) не равносильны. **20.** Все, кроме последнего. **21.** а) 5; б) -9; в) 12; г) -27. **22.** а) $12x-x-3=2$. **23.** а) $4=9x-7x$. **24.** а) $11y=-10$; б) $2x=-5$. **25.** а) -1; г) $\frac{2}{3}$. **26.** а) 8; б) 2,4. **27.** а) 9; г) $-\frac{5}{32}$; д) 0; е) $-\frac{1}{27}$. **28.** а) Умножьте обе части уравнения на 7. **29.** Умножьте обе части уравнения на 5. **30.** а) Умножьте обе части уравнения на 9. **31.** а) $7\frac{1}{2}$; б) $7\frac{5}{6}$. **32.** а) 27; б) 2. **33.** 48. **34.** 180 км. **35.** 4. **36.** 36 гусей. **37.** 1 кг 200 г. **38.** Все данные уравнения линейные; первой степени — а и б. **39.** а) $-4x=5$; б) $-3y=8$; в) $3x=14$; г) $0x=1$. **41.** а) 0,8. **42.** б) 5. **43.** а) 2,6. **44.** а) 23. **45.** а) 1. **46.** а) Уравнение решений не имеет, поскольку оно равносильно уравнению $0x=13$; б) уравнение имеет бесконечное множество корней, ему удовлетворяет каждое значение переменной z. **47.** а) -2. **48.** а) $\approx 1{,}736$; б) $\approx 0{,}519$; в) $\approx -1{,}815$. **49.** а) 1,232; б) 3,89916. **50.** Если второе число x, то первое число равно $x+6$. Имеем уравнение $5(x+6)-4x=40$. **51.** Составьте уравнение $6x-37=x+73$. **53.** 640 л и 320 л. **54.** 6 дней. **55.** 150 т и 750 т. **56.** 22. **57.** 4. **58.** 7,6 и 6. **59.** 35 и 70. **62.** 3. **63.** 40 и 8 лет. **64.** 150 га, 280 га. **65.** 21 м и 63 м. **66.** 10 м и 15 м. **67.** 9 и 7. **68.** 23,5 см и 35,5 см. **69.** 31, 25 и 16 га. **70.** 26, 29 и 24 ученика. **71.** 11, 23 и 22 кг. **72.** 40 к. **73.** 172, 258 и 430 га. **74.** Через 5 лет. **75.** 28. **76.** 120. **77.** 49,5 км. **78.** ≈ 28 км. **79.** 210 км. **80.** 70 км/ч, 50 км/ч. **81.** 8 км/ч, 12 км/ч. **82.** 20 км. **83.** 240. **84.** 80 км. **85.** 1320 км, 230 км/ч. **86.** 150 монет. **87.** а) $5+7$. **88.** а) 2,8. **89.** а) 0,2. **90.** а) 16. **91.** а) 9,6. **92.** д) $\frac{1}{2}(a-5)$. **94.** Площадь прямоугольника, его периметр, полупериметр. **95.** а) 9; б) -7; в) $-21{,}7$. **96.** а) $2\frac{1}{6}$. **97.** а) 1,45; б) $\frac{5}{6}$. **98.** а) 39; б) 7200. **100.** а) 2; б) 3. **101.** а) $10a+6$; б) $50+b$; в) $10m+n$; г) $100a+c$. **102.** а) 25, 32, 1000, 1 000 000, 625, 1 000 000 000; б) $\frac{1}{4}$, $\frac{8}{27}$, $\frac{1}{64}$, $\frac{81}{16}$, $\frac{49}{64}$; в) 0,008, 0,09, 0,000064, 0,000025; д) 16, 169, $-32{,}1$, -1; е) 81, -81, -81, 0,25, $-0{,}25$.

103. а) 91; б) 36; в) 44. 104. а) 72; г) −18. 105. $7^2+7^3+7^4+7^5 = 19600$. 106. а) Да; б) нет; в) нет; г) да; д) да; е) да. 108. 72,25 км^2. 109. 2, или $10^2+11^2+12^2+13^2+14^2 = 365+365$. 111. а) $(x+y)^2$; б) x^2+y^2; в) a^3-b^3; е) $(a+b)^3$ 112. а) 0,04; б) −13; д) 1;625. 115. 187,4161; б) ≈74,22; в) ≈3429; г) ≈7,94. 116. в) 0. 117. а) 3; б) 5; в) −0,5. 118. а) 1; б) −1; в) 1 и −1. 119. а) 4; б) и в) решений не имеют. 120. а) 5; б) −9; в) решений нет. 122. Не имеют. 123. а), в), е) — тождественные, остальные — нет. 124. Выражения не тождественны. 125. Не тождественны. 126. Да. 127. Да. 128. а) 3^{12}; б) 12^7; в) $\left(\frac{1}{2}\right)^7$. 129. а) x^{13}; д) c^{12}; е) z^8. 130. а) 729; б) 6561; в) −1. 131. а) x^8; б) a^8; в) a^6b^6. 132. а), б) Положительное; в) отрицательное. 133. а) 16; б) 0,000004. 134. а) 1; б) 1. 135. а) 0; б) 0; в) −5. 136. а) 1; б) 4; в) −4. 137. а) 0; б) 0; в) 1. 138. а) Нет; б) нет; в) да; г) нет; д) нет; е) нет. 139. а) и г). 140. б), г), е). 141. а) $6ab$; е) $6ab$; ж) $15xy$; з) $\frac{1}{2}x^6$. 142. а) 2; б) 1; в) −1; д) −6. 143. а) 10; в) −0,0125. 144. а) $6a^3bc$; г) $-x^2y^2$, е) axz. 145. а) $36a^6z^4$; б) $-6y^6$; г) $-8x^3$. 146. а) $4a^2x^2$; б) $9a^4$; в) $0{,}04x^6m^2$. 147. а) $27a^3x^6$; б) $x^{12}y^{12}$; в) $-8a^6b^3$. 148. а) $-6x^2y^6$; б) $-8a^6b^3$. 149. а) $18am^2c^4$; б) $-c^5x^2$; ж) $-72x^5$. 150. а) Да; б) нет; в) да. 151. а) 0; б) 1; в) решений нет.152. а) $2a+3b$; в) $3c-2y$. 153. а) $2a-3x$; д) $5a^2x$; е) $2a$. 154. а), в) — да, г) — нет. 155. Все, кроме в), г) и е). 156. а) ax, $-cx^2$ и 3. 157. а) 0. 159. Все, кроме б). 160. а) $4a-b+2b^2$; е) $15q$. 161. а) $3x^4-x^3-5x^2-2x$. 162. а) Третий; б) пятый. 163. $ab-4c^2$. 164. $2a+2b$. 166. $100a+10b+c$. 167. 5. 168. 14,4. 169. 22 л, 16л. 170. 170 кг, 20 кг и 10 кг. 171. а) $2ab+2c^2+3$; е) $x^3+4{,}5x^2-x$. 172. а) $-x^3+2x^2+1$; е) $-3xy+\frac{2}{5}x^2y+2\frac{1}{2}y^2$. 173. а) x^2+9x+5. 174. а) $1-a+2a^2+a^3$; в) $-4az-4z^2$. 175. а) $52cx+5c^2x+x$. 176. а) 11; б) −49. 177. $2y^4+y^3+3$. 178. x^3-8x^2-2. 179. а) 7; г) 6. 180. 2. 181. 248, 496, и 456. 182. 9 см, 10 см и 11 см. 185. Нет. 186. а) $6a^2+2ac$; е) $-3ml^3-3m^2l^2$. 187. а) $x^5+3x^3-x^2$. 188. а) x^3+x^2; е) $-2a^3+2a^2+2a$. 189. а) $8a^5$. 190. а) x^2-2x; е) $-p^2$. 191. а) Тождественны; г) не тождественны. 192. а) 2,7; г) −5. 194. а) 4; г) 4,8. 195. а) 0,6. 196. а) 0,2. 197. а) −5,5. 198. а) $3\frac{1}{7}$. 199. 1,4 грн. и 70 к. 200. 67 и 238. 201. 70 и −10. 203. Через 10 лет. 204. 48 и 12 лет. 205. 15 лет. 206. Через 4 дня. 207. 20 г. 208. а) $am-an+bm-bn$; в) $2a^2-5a+3$. 209. а) $ab+ad-bc-bd$. 210. б) $6-5c+c^2$; е) $0{,}25x^2-1{,}69$. 211. а) Да; б) да; в) нет. 212. б) m^3+n^3; г) n^2+4. 213. а) 0,36; б) 2; в) −0,04. 214. а) $5x^2-18x+14$; г) $3x-y^2$. 215. а) a^4-b^4. 216. а) $a^2+2ab+b^2$; г) $9a^2+12a+4$. 217. а) $7b^2+1$. 218. Доказательство по рисунку верно только для положительных значений a, b, c и d.

220. а) 0,75. 221. б) – 3. 222. в) Уравнение решений не имеет. 223. Решите уравнение $(11+x)(44+x) = (16+x)(32+x)$. 224. На 7. 226. 15,5 см. 227. 49 см^2 и 16 см^2. 229. а) x^2-m^2; е) a^2b^2-1. 230. а) $16a^2-1$; г) a^2-c^4, е) $4a^4-9b^2$. 231. е) $\frac{1}{4}c^2-p^2$. 232. г) $2{,}25-$ $-m^4$; е) $2\frac{7}{9}-a^2z^4$. 233. а) $32x^2-2$; г) $0{,}5c^2-8a^2c^2$. 234. г) $-\frac{1}{2}c^2+$ $+2q^2$. 235. а) a^2; в) 1. 236. а) x^4-81; в) $16a^4-1$; г) $81y^4-18y^2z^2+z^4$. 237. а) x^2-y^2; г) $9x^4a^2-1$. 238. а) $* + * = 2x+3y$. 239. На $6x+p$. 240. На $1-9a^2$. 241. а) $(x-m)(x+m)$; е) $(0{,}2-x)(0{,}2+x)$. 242. Воспользуйтесь формулой разности квадратов. 243. а) Вычислите 901^2-899^2. 246. а) $(n+5)^2-n^2=5(2n+5)$, а это произведение при каждом натуральном значении n делится на 5. 247. а) –0,5. 248. а) –25. 249. а) 27. 250. а) $\frac{1}{9}$; б) 0. 251. а) $a^2+2ac+c^2$. 252. г) $4a^2+20ax+25x^2$. 254. а) m^2+4m+4. 255. б) $p^2+0{,}2p+0{,}04$. 256. а) $b^2+2bc^3+c^6$. 257. а) $\frac{1}{4}c^2+2ca+4a^2$. 258. а) $0{,}04c^2-0{,}4cp^3+p^6$. 259. б) $a^4-2a^2c+c^2$. 260. б) $4q^4+4q^2p+p^2$. 261. а) $\frac{1}{4}+2c^2+4c^4$. 262. а) 9. 263. а) $4a-4a^2$. 264. а) $2x^2-2x-31$. 265. б) $3a^2+2a+3$. 266. а) $* = c$. 267. а) 16. 268. в) $(a+b)^2-2ab = a^2+2ab+b^2-2ab =$ $=a^2+b^2$. 269. При $ab=0$, т. е. когда $a=0$ или $b=0$. 270. а) Если α — малое число, то α^2 настолько мало, что им можно пренебречь; б) 1,006; в) 0,98. 273. Умножьте $a+b$ на $a^2+2ab+b^2$; в) m^6+6m^4ac+ $+12m^2a^2c^2+8a^3c^3$. 274. а) 1. 275. а) 1. 276. а) –5. 277. а) 4 и 2; в) –1 и –2. 278. а) 3 и 1; б) и в) — решений нет. 279. а) 0 и 16; б) 0 и 20; в) решений нет. 281. а) $x(a+b)$. 282. а) $b(a+3b)$. 283. а) $a(2a+3)$. 284. а) $ab^3(a-6b)$. 285. а) $a^4(3a^2+6a+1)$. 286. а) $c(2ac-8c^2d+4ad)$. 287. а) $x(0{,}5+x-1{,}5x^2)$. 288. а) 12,3; б) 113. 289. а) $16^{16}(16+1)=17\cdot 16^{16}$, это произведение делится на 17. 291. а) $(x-y)(a+c)$. 292. а) 0 и 3; в) 0 и –4. 293. а) 0 и 1. 294. а) 0 и 5. 295. а) 0 и –2. 296. а) 0 и 5. 297. а) $(a+m)(c+z)$; г) $(a+1)(x+2)$. 298. а) $(a+b)(a+b-3)$. 299. а) $(a+c)(b+c)$. 300. а) $(a-z)(4a-3)$. 301. а) $(a-b)(a-4)$. 302. а) $(x+y-z)(a+n)$; б) $(a+b-2)(1-x)$. 304. а) 3620. 305. а) 1728; б) 100. 306. а) 15 и –3; г) 1,5. 307. г) $(p-x^2)\times$ $\times(p+x^2)$. 308. д) $(4-c)(4+c)$. 309. е) $\left(1+\frac{1}{2}x\right)\left(1+\frac{1}{2}x\right)$. 310. б) $(x-1)\times$ $\times(1-x)$. 311. в) $(2a-11)(2a+9)$. 312. е) $9c^2$. 313. а) 3 и –3. 314. а) 3; в) 4. 315. а) 3; г) 2. 316. Умножьте обе части уравнения на 3. 317 а) 1 и –1; б) 2 и – 2. 318. а) $(a-c)(a^2+ac+c^2)$. 319. а) $(c-4x)(c^2+4cx+$ $+16x^2)$. 320. в) $(3x^2-ay)(9x^4+3x^2ay+a^2y^2)$. 321.в) $(c+2x)(c^2-$ $-2cx+4x^2)$. 324. б) $(3x-c^2)(9x^2+3xc+c^4)$. 325.б) $-(z+p)(z^2-zp+p^2)$. 326. а) a^3-x^3. 327.а) $1-x^3$. 328. б) $1-c^3$. 329. б) m^3+m^2-m-1. 330. а) a^6+1. 331. а) $27x^3+y^3$. 3 32. а) $8a^{21}+b^{12}$. 333. а) x^3+8.

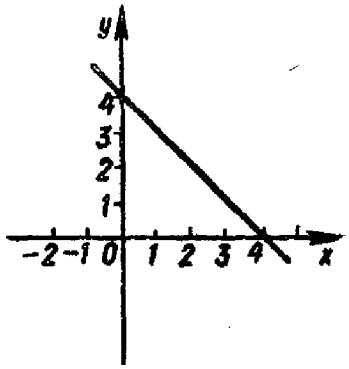


Рис. 115

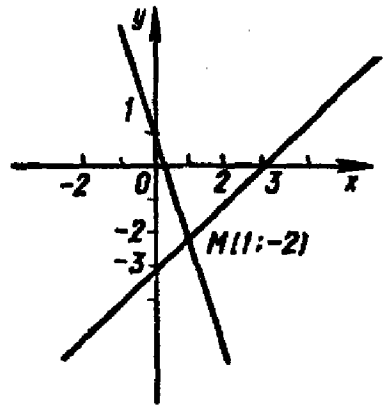


Рис. 116

334. а) x^6+c^3. **335.** а) $x^3-0{,}008$. **336.** а) $a^{15}+b^3$. **337.** а) $a(a^2+6a+12)$. **338.** а) 1; б) 0,000008. **339.** а) -1. **340.** а) 27. **341.** Решений нет. **342.** Разложите разность или сумму кубов на множители. **343.** Разложите сумму кубов на множители, один из них 2000. **344.** Используйте формулу суммы кубов. **345.** а) $a(p-x)(p+x)$. **346.** а) $3(3x-5)(3x+5)$. **347.** а) $5a(1-a)(1+a)$. **348.** а) $(m-3)\times$ $\times(m+3)(m^2+3m+9)(m^2-3m+9)$. **349.** б) $(1+a^2)(a^2-a^4-1)$. **350.** б) $\frac{1}{2}z\times$ $\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}z\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}z\right)$. **351.** а) $m(x+2)(x+2)$. **352.** б) $-(a+3)(a+3)$. **353.** а) $x^3(x-1)(x+1)$; г) $(x+1-a)(x+1+a)$. **354.** в) $(m-x-2)(m+x+2)$. **355.** а) $(x-a)(1+x+a)$. **356.** г) $(a+b)(1-a^2+ab-b^2)$. **357.** Например, x^6-y^6. **358.** Преобразуйте правые части равенств. **359.** а) 0,1 и -1. **360.** а) 0; б) 2; в) 1, -1 и 2; г) 3. **361.** а) 1, -1 и -3; б) 1, 2 и -2. **362.** б) x^2 и $(x-3)$ — числа неотрицательные и неравные, следовательно их сумма — число положительное при каждом значении x. **363.** а) $6x-x^2-10=-(x^2-6x+9)-1=-(x-3)^2-1$. При каждом значении x значение этого выражения отрицательное. **364.** а) Выражение x^2, а следовательно, и x^2+5 имеет наименьшее значение при $x=0$; д) $x^2+4x+6=x^2+4x+4+2=(x+2)^2+2$. Наименьшее значение данное выражение имеет при $x=-2$. **365.** а) -3; б) 0; в) 25; г) 1. **366.** См. решение задачи **367**. **368.** а) 250247; б) 638, 091, в) 1273, 4018. **369.** а) $5^3(5^2-5+1)=5^3\cdot 21$ — делится на 21. **370.** в) $(5n+3)^2-(5n-3)^2=6\cdot 10n$ — делится на 60. **371.** Докажите, что $(a+b)^2-(a^2+b^2)=2ab$. **372.** $(a+b)^2-2ab=a^2+b^2$. **374.** $(2n+1)^2-(2n-1)^2=8n$. **376.** $(a+1)^2-a^2=(a+1)+a$. **377.** $2n+1=(n+1)^2-n^2$. **378.** $(2n+1)=4n(n+1)+1$, число $n(n+1)$ четное, поэтому $4n(n+1)$ делится на 8. **379.** $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$. Следовательно, если $a+b$ делится на 10, то и a^2-b^2 делится на 10. **382.** Нет. **383.** а) (3; 2); б) (3; 2); в) (4; -3). **384.** а) (0; 7); (1; 5). **387.** При любых значениях x и y значение x^2+y^2 — неотрицательное, не может равняться -5. **388.** а) Нет; б) имеет, например (1; 2); в) (0; 0). **389.** а) Одно; б) одно; в) много. **391.** а) (1; 1); б) (16; 1) и (1; 2). **392.** 5 и 4.

393. 7. **395.** а) См. рис. 115. **396.** 9. **397.** –5. **398.** 0,2. **399.** –1. **400.** а) (2; 0) и (0; 3). **401.** См. рис. 116. M (1; –2). **406.** а) Нет; б) да; в) да. **408.** (–1; 2). **409.** Таких систем существует много. **410.** а) (3; 4); б) (3; 1); д) множество решений; е) решений нет. **411.** а) Одно, б) ни одного; в) одно. **412.** Не существует таких значений x и y, при которых значение выражения $8x+2y$ одновременно равно 15 и 35. **413.** Бесконечное множество. Например, (6; 0), (1; 3), (11; –3). **414.** а) (5; 2). **415.** а) (6; 5). **416.** а) (39; 13). **417.** а) (8; 1). **418.** а) (7; –3). **419.** а) (0; 2). **420.** а) Решений нет. **421.** а) (–61; 14). **422.** а) (8; 13). **423.** а) (18; 6). **424.** а) (20; 20). **425.** а) (1; –1,5). **426.** а) (21; 16). **427.** Покажите, что система данных уравнений не имеет решений. **428.** Пересекаются. **429.** а) (5; 2). **430.** а) (3; 1). **431.** а) (1; 2). **432.** а) (2; –3). **433.** а) (3; 3). **434.** а) (1; 1). **435.** а) (9; 8). **436.** а) $\left(\frac{1}{3}; 2\right)$. **438.** а) (3; 2); в) (1; 2); д) (1; 0). **439.** 20 к. и 30 к. **440.** 6 м и 3 м. **441.** 20 и 30. **442.** 20 км/ч и 3 км/ч. **443.** 60 км/ч. **444.** 5 км/ч и 4,5 км/ч. **445.** 102 и 40. **446.** 48 и 60. **447.** 45 и 80. **448.** 17 и 7. **449.** 1,75 и 0,75. **450.** –7 и –5. **451.** 18 и 7 или –18 и –7. **452.** 30 и 20 книг. **453.** Детей —24, столов — 9. **454.** 8 воробьев, 6 веток. **455.** 40 и 12 лет. **456.** 11 и 6 лет. **457.** 5 и 7 мешков. **458.** 20 баранов. **459.** 23 фазана, 12 кролей. **460.** 7см и 10 см. **461.** Рассмотрите два случая. **462.** 80° и 30°. **463.** 17 см и 18 см. **464.** 1110 и 990 куб. м. **465.** 12 м и 10 м. **466.** $9\frac{7}{9}$ м и $12\frac{2}{9}$ м. **467.** 20 и 30 дней. **468.** 800 т и 600 т. **469.** 100 т и 300 т. **470.** 160 яиц. **471.** 9 м. **472.** 46 и 11. **473.** 1,25 грн. **474.** 5 человек. **475.** 126 км. **476.** 12 км. **477.** 15 м/с и 10 м/с. **478.** 75 м, 15 м/с. **479.** 9 и 28 частей. **480.** 18 лет. **481.** 3456 овец. **482.** 79 франков и 96 сантимов. **483.** 7 детей. **484.** 1 вол, 9 коров. **485.** a^{19}. **486.** Умножьте и разделите данное число на (3–1).

8 класс

1. а) 72; д) –18. **2.** а) 6000. **3.** а) x^8y^2; в) a^6b^8; э) $500a^8x^5$. **4.** а) x^2+9x+5; е) $81a^4-b^4$. **5.** а) x^2+2xy; ж) $8b+25$. **6.** а) $(x-4)(x+4)$; в) $(x-3)^2$; е) $(x+y)(2-a)$. **7.** а) $\frac{5}{6}$; б) –0,8. **8.** а) $x = 2$; г) $x = 2{,}5$. **9.** а) 16; б) 0,16; в) 6561. **10.** а) x^5; е) 1. **11.** а) $2a^3x$; б) $3acx^2$. **12.** а) $3a^3$; е) $-bc$. **13.** а) 1; в) –1. **14.** а) 50; б) 0,4. **15.** а) $x+2$; б) $(2a+3)^2$. **16.** в) $\frac{3m}{c}$; д) $\frac{x^2}{1+x}$. **17.** а) $\frac{2c}{3p}$; б) $\frac{1}{x-y}$. **18.** а) 125; б) 0,027; в) $\frac{1}{9}$. **19.** а) $n = 0$; в) $x = -4$. **22.** а) $x \neq 5$; в) $x \neq 2$ и $x \neq -2$; г) все действительные числа. **23.** а) $a = 4$ и $a = -4$, б) $a = 0$, $a = 3$

и $a=-3$. 24. б) 0,96. 26. Нет. 27. а) Да. 29. а) $c=3$; б) $c=-2$; д) $c=-502$. 30. а) $x=3$. 33. а) 16. 34. в) Нет. 35. б) 3; в) 1. 36. г) 4. 37. а) $\frac{1}{2a}$. 38. г) 2,5. 39. г) $2a$. 40. г) -1. 41. г) $\frac{125}{c}$. 42. в) $3x$. 43. в) $\frac{4x}{7y(x-y)}$. 44. в) $\frac{2}{a}$. 45. в) $\frac{x^2}{y^2}$. 46. в) $\frac{x}{y}$. 47. в) $-m$. 49. а) $\frac{p}{2x}$. 50. б) 1. 52. а) $\frac{2a}{xa}$ и $\frac{x}{xa}$. 54. а) $\frac{y+1}{y-1}$. 55. б) 1; ж) $\frac{c^2+1}{3ab}$. 56. а) $\frac{x+y}{3a}$. 57. б) $\frac{y}{2m}$; в) $\frac{2x-12}{c}$. 58. а) $\frac{a+b-c}{x}$. 59. а) 1. 60. а) $\frac{m}{x}$. 61. $\frac{13x^2-11y^2}{x^2-y^2}$. 62. $\frac{8x-6y}{2x-y}$. 63. $\frac{x^2-9xy}{3x-15y}$. 65. Покажите, что данное выражение тождественно равно $\frac{(a-1)^2}{a^2+1}$. 66. а) $\frac{2}{2a}$ и $\frac{3}{2a}$. 67. а) $\frac{5x^2}{15a^2x^3}$ и $\frac{3a}{15a^2x^3}$. 68. а) $\frac{a-x}{(a-x)^2}$ и $\frac{1}{(a-x)^2}$. 69. а) $\frac{4ax(x-a)}{x^2-a^2}$ и $\frac{5x}{x^2-a^2}$. 70. а) $\frac{x(a-c)}{ax(a-c)}$, $\frac{2ax}{ax(a-c)}$ и $\frac{3a}{ax(a-c)}$. 71. а) $\frac{5}{2x}$; в) $\frac{a+5x}{6x}$. 72. а) $\frac{4a-5x}{ax^2}$; б) $\frac{a}{c(a-c)}$. 73. а) $\frac{4}{9a}$. 74. а) $\frac{-1}{4m}$. 75. а) $\frac{6x^2+5z^2}{15ax^2z^2}$. 76. а) $\frac{bc+ac-ab}{abc}$. 77. а) $\frac{9a-12x}{35}$. 78. $\frac{19a-24b+41}{24}$. 79. $\frac{45x-26y+19}{90}$. 80. $\frac{7a+6b}{12}$. 81. $\frac{10a+33b}{24}$. 82. $\frac{-7x-51}{20x}$. 83. $\frac{-26a+31ab+21b}{18ab}$. 84. а) $\frac{15y}{2x(4x-5y)}$. 85. а) $\frac{2a}{a^2-b^2}$. 86. а) $\frac{3x^2-10x}{x^2-4}$. 87. а) $\frac{2x^2-x-27}{x^2-9}$. 88. а) $\frac{a+b+c}{c}$. 89. а) $\frac{2}{x-1}$. 90. а) $\frac{3(2a^2-b^2)}{4ab(2a-b)}$. 91. а) $\frac{20}{a^2-1}$. 92. а) $\frac{2x^2+17x+11}{(x^2-1)(x+2)}$. 93. а) $\frac{2x^2-3x+3}{(x-1)^3}$. 95. а) 8. 97. Докажите, что данное выражение тождественно равно $-\frac{1}{6}$. 98. Докажите, что данное выражение тождественно равно a^2+4. 99. в) Перемножьте $a-x$ и $a^3+a^2x+ax^2+x^3$. 100. а) $\frac{10}{21}$; д) $\frac{3}{2a^2bx^2}$. 101. г) $\frac{4x}{3c}$. 102. а) $\frac{9}{c}$. 103. а) $\frac{3}{x^5}$. 104. а) $-\frac{3n^5}{2}$. 105. в) -36. 106. в) $\frac{3a^2}{2c}$. 107. в) $\frac{x+y}{x-y}$. 108. в) $\frac{4}{3am}$. 109. в) $\frac{4(a-c)}{ac(a+c)}$.

110. б) $\frac{6}{(a+3)(a+2)}$. 111. в) $\frac{m^2}{4a^2c^6}$. 113. в) $\frac{8c^3x^6}{125a^9n^3}$. 114. в) $\frac{8a^3b^3}{(a-b)^3}$. 115. в) 1. 116. г) $\frac{4a}{3(a-x)}$. 118. б) 1,5. Сначала упростите выражение. 120. а) −0,5; б) −1,5. 121. в) −2. 122. в) $\frac{x}{5y}$. 123. в) $27x^5$. 124. в) $\frac{1}{2xy}$. 125°. в) $\frac{x^2}{(x+y)^2}$. 126. в) $\frac{cm^3}{3(m+1)}$. 127. в) $\frac{(1-a)b}{6}$. 128. в) −1. 129. а) $-\frac{1}{a+4x^2}$. 130. в) $\frac{3c}{2y}$. 131. а) $\frac{9a}{5b^2}$. 132. а) $\frac{9c}{2am^4}$. 133. а) $\frac{10x}{9a}$. 134. а) 1,2. 135. −2, 1, 2. 136. б) 6. 137. а) a^2-a+1. 138. а) $\frac{1-m}{1-2m}$. 139. а) $\frac{3c+1}{2-4c}$. 140. а) $3-a^2$. 141. $-x$. 142. $\frac{2(3y-2x)}{y}$. 143. $n-1$. 145. $\frac{4x}{3a}$. 146. $16a^3by$. 147. $\frac{a+1}{a-1}$. 148. $\frac{a^3+8a-8}{2(a^3+8)}$. 149. $-2a(a+b)$. 150. $\frac{3}{1-c}$. 151. $\frac{x(a-x)}{x+a}$. 152. $\frac{4(a+1)(a+2)}{a(a-2)}$. 153. 1. 154. −3. 155. −1. 156. а) $\frac{c-a}{acx}$. 158. а) 0. 160. а) 2; в) 0. 161. а) 0. 162. а) 3. 163. а) −4. 164. а) 4. 165. а) 1 и −1. 166. а) −4. 167. а) 3. 168. а) 10. 169. а) 3. 170. а) 4. 171. а) 8. 172. а) $\frac{3}{7}$. 173. 7. 174. $\frac{3}{5}$. 175. $\frac{5}{10}$. 176. 27 и 21. 177. 21 м и 14 м. 178. 27 и 21. 179. 80 и 40 км/ч. 180. 15 ч. 181. Задача решается как и предыдущая. 182. 20 и 30 дней. 185. Существует. 188. а) 7. 189. а) 13. 190. а) 20. 191. а) 0,2. 192. а) 1,1. 193. а) 0,01. 194. а) 3,2. 195. а) $\frac{1}{2}$. 196. а) 14. 197. а) 4. 198. а) −30. 199. а) 6. 200. а) 12. 201. а) 34. 202. а) 0,6. 203. а) 30. 204. а) 23. 205. а) 33. 206. а) −71. 207. а) ≈25; г) ≈−82. 208. а) 1,4142135. 210. а) Да; б) нет; в) да; г) да. 211. а) 5, 1, 13. 212. 324, 625. 213. а) Да; в) нет; г) нет. 214. а) 49; в) 36. 215. а) 22; е) 2 и −2. 216. Рациональные все. 217. Действительные все. 218. Рациональные все, кроме $\sqrt{5}$. 219. Рациональное. 220. Иррациональное. 221. а) Да; б) нет. 223. Верно. 224. а), г), ж). 225. а) Например, $\frac{7}{10}$. 226. а) 2,25; б) 0,4. 227. а) 0,666... 228. а) 1,2; в) 2,333... 229. $-\frac{3}{8} > -\frac{4}{9}$. 230. а) $\frac{2}{3} > 0{,}66$; в) $\frac{2}{3} = 0{,}666...$ 232. а) $\sqrt{2} > 1{,}41$. 233. а) $\pi > 3{,}14$. 234. а) 1,914.

236. а) 80. **237.** а) 0,5; е) 0,05. **238.** а) $\frac{4}{5}$; г) $\frac{5}{3}$. **239.** а) 20. **240.** а) 30. **241.** $\frac{135}{154}$. **242.** а) 20. **243.** б) $\frac{5}{3}$. **244.** а) 450; г) −390; е) 1350. **245.** а) 19,773719. **246.** г) 12. Воспользуйтесь формулой разности квадратов. **247.** а) 9. **248.** а) 15; б) −16. **249.** а) 5; в) −7. **250.** а) x; б) $5|a|$; г) $-|m|$. **251.** а) $x \geqslant 0$; б) $a \geqslant 0$; в) $m \geqslant 0$. **252.** а) $-3n$; б) $-x^2$. **253.** а) 7. **254.** а) 3,6, 12; б) 25, −25, −49. **255.** а) $2\sqrt{3}$. **256.** а) $5\sqrt{10}$. **257.** а) $11\sqrt{2}$. **258.** а) $\sqrt{12}$. **259.** а) $\sqrt{0{,}1}$. **260.** а) $\sqrt{\frac{1}{2}}$. **264.** а) 21. **265.** а) $24-12\sqrt{2}$. **266.** а) $21\sqrt{2}+10\sqrt{3}$. **267.** а) 4. **268.** а) 2. **269.** а) 11. **270.** а) $4+2\sqrt{3}$. **271.** а) $17-4\sqrt{15}$. **272.** а) 6. **273.** а) 5. **274.** а) $a\sqrt{2}$. **275.** а) $-x\sqrt{2}$. **276.** а) $\sqrt{ac^2}$. **277.** а) $-\sqrt{m^4}$. **278.** а) $4\sqrt{2}$. **279.** а) $-\sqrt{3}$. **280.** а) $8\sqrt{2}$. **281.** а) $\sqrt{a}$. **282.** а) 0. **283.** а) 0. **284.** а) $a+\sqrt{a}-2$. **285.** а) a. **286.** а) b^2-x. **287.** а) $\sqrt{5} \times$ $\times(\sqrt{5}+1)$; е) $\sqrt{ac}\,(\sqrt{ac}-3)$. **288.** $\sqrt{2}$. **289.** а) $2\sqrt{3}$; е) $\frac{a(a+\sqrt{b})}{a^2-b}$. **291.** б), в). **292.** а), б), д). **293.** а) $2x^2-6x-50=0$. **294.** а) 0. **295.** а) 0 и 2. **296.** а) 3 и −3. **297.** а) 0. **298.** а) 2 и −2. **299.** а) 0 и −1,5. **300.** а) 0; б) 2 и −2. **301.** а) 0 и 0,8. **302.** а) 0 и −0,6. **303.** а) 1 и −1. **304.** а) Решений нет. **305.** а) $\sqrt{5{,}5}$ и $-\sqrt{5{,}5}$. **306.** а) 3 и −3. **307.** а) $\sqrt{10}$ и $-\sqrt{10}$. **308.** а) 22 м; б) $\sqrt{s}$. **309.** а) 68 см. **310.** 1,2 дм. **311.** а) ≈ 10; б) $\sqrt{\frac{s}{\pi}}$. **312.** ≈ 10 см. **313.** 26. **314.** 2 и 3. **315.** 2 см и 4 см. Из уравнения $\frac{(x+2)^2}{x^2}=4$ следует $\frac{x+2}{x}=2$ или $\frac{x+2}{x}=-2$. **316.** 9 дм и 6 дм. **317.** а) $\pm 5{,}6742$; в) 0 и 10,5435. **318.** а) 2 и 4. **319.** а) 6 и −2. **320.** а) 2 и 9. **321.** а) 6. **322.** а) 1,5 и −2,5. **323.** а) $\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{2}$. **324.** а) 2 и 2,5. **326.** а, б, г. **327.** а) 6 и −2,5. **328.** а) 1 и $\frac{4}{9}$. **329.** а) Решений нет. **330.** а) $\frac{3}{2}$ и $-\frac{2}{3}$. **331.** а) 2 и $\frac{3}{2}$. **332.** а) $\frac{4}{3}$ и $\frac{3}{4}$. **333.** а) 0,48 и −0,4. **334.** а) $\frac{3}{4}$ и $-\frac{2}{9}$. **335.** а) $\frac{5}{6}$ и $\frac{3}{5}$. **336.** а) $\frac{7}{3}$ и −4. **337.** а) 7 и −1. **338.** а) 6 и −1. **339.** а) 4 и −2. **340.** а) 4 и $-\frac{1}{4}$. **341.** а) 0 и 13. **342.** 7 и 1. **343.** а) 3 и $-\frac{5}{7}$. **344.** а) 24 и −26. **345.** а) 2 и $\frac{20}{3}$. **346.** а) 2 и 4. **347.** а) 1 и $-\frac{1}{4}$. **349.** а) 1 и −3. **350.** а) $-1 \pm \sqrt{17}$. **351.** а) 1 и $-\frac{1}{2}$. **352.** а) −0,2. **353.** а) $3 \pm \sqrt{5}$. **354.** а) 6. **355.** а) 5. **357.** а) 5 и −3. **358.** а) Решений нет. **360.** а) −91 и

87. 361. а) $-\sqrt{2}$ и 1. 362. а) $\sqrt{2}$ и $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 363. а) 1,4293766 и −1,7734625. 365. а) 1, −1, 2 и −2. Сделайте замену: $x^2=y$; в) сделайте замену: $\sqrt{x}=y$. 366. а) 25 и 36. 367. 24 и 13 или −13 и −24. 368. 40 м и 20 м. 369. 2 км и 1 км. 370. 16 и 17 или −16 и −15. 371. 6 или 18. 372. 11 и 12. 373. 11, 12 и 13 или −13, −12 и −11. 374. $\frac{9}{7}$. 375. $\frac{7}{10}$ или $\frac{-10}{-7}$. 376. 21 ряд. 378. 7 км/ч. 379. 60 км/ч. 380. 3 км/ч. 381. 60 км/ч. 383. 2 км/ч. 384. 12 км/ч. 385. 10 ч. 386. 200 км или 160 км. 387. 2,4 км/ч. 388. 80 см и 60 см. 389. 60 ч. 390. 10 км. 391. 12 дней, 6 дней. 392. 12 дней, 6 дней. 393. 8 дней. 394. 30 дней, 20 дней. 395. 14 дней, 11 дней. 396. 5 ч, 7 ч. 397. 48 или 16. 398. 50 веток, 4 пчелы. 399. 18 точек. 400. 12. 402. 8 см и 5 см. 404. 1 см. 405. 0,12 $м^3$ или $1\frac{61}{300}$ $м^3$. 406. 800 $м^2$ и 500 $м^2$. 407. 30 км/ч и 24 км/ч. 408. 160 г, 20%. 409. 8,8 $г/см^3$, 7,8 $г/см^3$. 410. а) Да; б) нет. 413. $p=-10,7$, $q=7$. 414. −5. 415. а) $x^2-6x+8=0$. 416. −21; −147. 417. 16; −16,5. 418. 1 и −7. 419. −2. 420. а) 54 и 27. 423. Да. 424. $p=3a$; да. 425. Да. 426. Область определения — множество всех положительных чисел. 427. $m=8,6v$. 428. $s=55t$. 429. $s=5x$. 430. $\alpha=180^\circ-\beta$; здесь β — аргумент. 431. $\alpha=0,5\beta$, $0^\circ<\beta<360^\circ$. 432. Да. 433. Нет. 434. 7; 5; −1; 19; 2005. 438. 30. 440. $y=500-60x$; область определения — множество чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. 441. $s=100-\pi x^2$, $0<x<10$. 442. а) Множество R; б) множество R, кроме $x=0$; е) множество действительных чисел, не больших 2. 443. а) Множество действительных чисел, не больших 1 и отличных от 0; б) $0\leqslant x\leqslant 3$; в) $-1\leqslant x\leqslant 1$. 448. Точка A принадлежит. 453. Да. 454. а, б. 455. 2; 7. 459. Оси x и y график пересекает в точках $A\left(\frac{3}{2};\ 0\right)$ и B (0; 2). Значения функции положительны при $x<\frac{3}{2}$. Функция убывающая. 461. а) Проходит. 464. $y=-\frac{2}{3}x+2$. 465. $y=-\frac{2}{3}x+2$. 466. $y=1,5x+3$ и $y=1,5x-3$. 467. $y=\frac{60}{x}$. 471. а) Множество всех действительных чисел, кроме нуля. 472. 50; −2. 474. Нет. 475. а) $k=1$. 476. Проходит через B, C, K. 477. Если график функции $y=\frac{k}{x}$ проходит через точку $M(-a;\ a)$, то он проходит также через точку $M_1(a;\ -a)$, поскольку из $a=\frac{k}{-a}$ следует $-a=\frac{k}{a}$. 479. Верно. 481. Алюминиевый, приблизительно в 3,3 раза. 486. Через точки A и B проходит. 490. Через A и K

проходит. 492. Относительно прямой, уравнение которой $y=x$. 493. а) 1. 494. а) Решений нет. 496. в) Три корня. 497. а) $\frac{203}{405}$; в) $\frac{999}{1001}$. 498. а) Эти числа равны. 500. а) 0,999. 501. а) Разложите на множители числитель: $x^4+a^2x^2+a^4=x^4+2a^2x^2+a^4-a^2x^2=$ $=(x^2+a^2)^2-(ax)^2=(x^2-ax+a^2)(x^2+ax+a^2)$; б) $\frac{2x+1}{4x^3+2x^2+x}$. 502. а) $\frac{c^{32}-1}{c^{17}-c^{15}}$. Домножьте данное выражение на $c-\frac{1}{c}$. 504. Существуют. Подставьте в тождество, например, $a=14$, $b=7$. 505. Рациональное. 506. Покажите, что $4\pm2\sqrt{3}=(1\pm\sqrt{3})^2$. 507. 34, 334, 3334. 508. Первая разность больше. 509. 99. 511. а) Разложите на множители левую часть уравнения; д) сделайте замену $x+6=y$; е) сделайте замену $x^2-2x-1=y$. 513. $\pm\sqrt{5}$. 514. 2. 515. $\pm\sqrt{3}$. 516. 1; 3. 517. Чтобы корни данного уравнения были рациональными, необходимо, чтобы выполнялось равенство $p^2-4q=m^2$, где m — целое нечетное число. Покажите, что такого m не существует. 518. 3 км/ч. 519. 40 км/ч, 50 км/ч. 520. 4,5 ч и 3,6 ч. 521. 5 : 6. 522. 3 км/ч. 523. 121 км. 524. ≈64,4 км/ч. 525. ≈11 ч 22 мин. 526. 11 или −10. 527. 5%. 528. 10,5 бу и 24,5 бу. 529. 40 или 60 пистолей. 530. 3,5. 531. а) Сделайте замену $\frac{1}{x}=y$; б) данное уравнение равносильно уравнению $(x-$ $-11)(x+9)(x^2+2x+101)=0$. 532. Возведите в квадрат правую часть равенства. 534. 45 и 54. 535. 27. 537. а) 1 и 0; б) −1 и 0. 538. Покажите, что $(\sqrt{65}-8)^3<0{,}001$ и что $(8+\sqrt{65})^3-(\sqrt{65}-8)^3$ — натуральное число. Задачу можно обобщить на любой натуральный показатель степени n. 539. а) 193^3; б) 147^3. Найдите сначала показатель степени.

9 класс

1. в) Число a больше b. 2. $n>m$. 3. $x>y$. 5. Число b наибольшее, a наименьшее. 8. $\sqrt{10}$: 2. 9. Значение выражения $2x+3$ меньше. 12. $10^9(100-10)>10^9(10+1)$. 14. б) При $c=-2$ неравенство неверно. 15. в) $(n-1)^2\geqslant0$. 17. а) $x<z$. 18. а) $a>b$; в) $a\geqslant b$. 19. б) $a\leqslant b$. 21. а) $17<23$; б) $-65<-59$. 23. а) $2a>2b$; г) $-3a<-3b$. 24. а) Положительное; б) отрицательное. 25. а) $12<20$; г) $a+x<b+z$. 26. а) $10<24$; г) $20>4$. 28. $\frac{c}{a}>\frac{c}{b}$. 29. $\frac{1}{b}<\frac{1}{d}<\frac{1}{c}<\frac{1}{a}$. 32. Верно. 33. а) $20<2x<24$; в) $25<3x-5<31$; г) $\frac{1}{6}<\frac{2}{x}<\frac{1}{5}$. 34. б) $36<$ $<xy<52$; в) $8<y-x<10$. 35. Да. 36. а) 3, 4 и 5; б) 0, 1, 2 и 3.

38. а) $x > 3$. 39. в) $z \geqslant 7$. 40. а) $x < 5$. 41. а) $z > 12$. 42. а) $x > -5$. 43. а) $x > -3$. 44. а) $x < 1$. 45. а) $x < 2$. 48. а) $x > 3$. 49. а) $x \geqslant 5$. 50. а) $x < 6$. 51. б) $z \leqslant 3$. 52. а) Решений нет; б) неравенству удовлетворяет каждое значение z. 53. б) $y < -\frac{8}{9}$. 54. б) $x < -\frac{10}{13}$. 55. а) $y > \frac{6}{13}$. 58. а) $x > 1$. 59. а) $x > -\frac{4}{3}$. 60. а) $x > -2$. 61. б) $y < \frac{16}{9}$. 63. а) $x > \frac{10}{3}$. 64. а) $z > \frac{81}{4}$. 65. а) $x > \frac{5}{6}$. 66. а) $x > 8$. 67. а) $c < \frac{1}{4}$. 68. а) $x > 1$. 69. а) $x \geqslant 7$. 70. а) $c > 0$; г) $c \geqslant \frac{11}{3}$. 71. а) $x > 2{,}5$; г) $x \leqslant 0$. 72. а) $x \geqslant 2$; в) $x \geqslant 2$. 73. а) $n = 4$. 74. а) $m = 4$; б) такого значения не существует. 75. ≈25 км. 76. а) Да. 77. 2 и 3. 80. а) $(-3; 1)$. 81. а) Решений нет. 82. б) $x \geqslant 10$. 83. а) $(6; 8)$. 84. а) $\left(\frac{5}{2}; \frac{17}{3}\right)$. 85. а) $(2;16]$. 86. а) Решений нет. 87. а) $\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$. 88. а) $(-\infty;-3)$. 89. а) {3, 4, 5, 6}. 90. а) $\left(\frac{2}{3}; 3\right)$. 91. а) $\left(1; \frac{7}{4}\right)$. 92. а) $c > \frac{2}{3}$. 94. а) $(-2; 7)$; е) $x \geqslant 5$. 95. а) $(-3; 7)$; д) $(-\infty; -4)$; е) $(2; \infty)$; з) $(0; 3)$. 96. а) $4a^2-(2a-1)(2a+1)=4a^2-(4a^2-1) > 0$; б) $(a-3)^2-a(a-6)=9 > 0$. 97. а) $a^2+25-16a=(a-8)^2+1$. 98. а) $(a+1)^2-4a=(a-1)^2 \geqslant 0$. 99. а) $\frac{2a}{1+a^2} - 1 = \frac{(a-1)^2}{1+a^2}$. 100. а) При каждом отрицательном x числа $x-1$ и $x-2$ отрицательны, а их произведение положительно; б) при отрицательном x число x^2+9 положительное, а $10x$ отрицательное. 101. б) $9c + \frac{1}{c} - 6 = \frac{(3c-1)^2}{c}$; г) $(1-c)\left(1-\frac{1}{c}\right) = -\frac{(c-1)^2}{c}$, 102. в) $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc = \frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-2bc) = \frac{1}{2}((a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2) \geqslant 0$. 103. Покажите, что $a^2+b^2 \geqslant 2ab$. 104. Если $a < b$, то $2a < a+b$, откуда $a < \frac{a+b}{2}$. 105. Если $ab > 0$, то $(a+b)^2 > a^2+b^2$. 106. $\frac{a^2+b^2}{2} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(a-b)^2}{4}$. 108. [0; 8]. 109. $[0; \infty)$; принадлежит. 110. а) R; б) все действительные числа, кроме 2; г) все действительные числа, кроме 3 и 4; е) $(-5; \infty)$. 111. $f(-3)=-32$, $f(0)=-5$, $f(\sqrt{3})=3\sqrt{3}-5$. 112. 12. 113. а) $[-5; 5]$, $[-3; 5]$; в) $f(x)=4$ при $x=0$ и $x=3$. 115. а) $(0; \infty)$; б) $(0; 1]$; в) $[0; 4]$. 116. Да. 117. Да. 121. а) Симметричны относительно оси y. 124. а) Перенести на 3 единицы в направлении оси y; д) отобразить симметрично относительно оси x и перенести на 2 единицы в

направлении оси y. 126. Область значений $[-4; \infty)$; значения y отрицательные при $-2 < x < 2$. 127. $(\pm\sqrt{3}; 0)$, $(0; 3)$, $(-\infty; 3]$. 131. а) В точках $x=0$ и $x=2$. 132. а) Да, $x=3$; в) нет; г) да; д) нет. 133. а) $(0; 4)$; в) $(2; -4)$. 144. Нет. 146. $x=-5$ и $x=1$. 147. Все, кроме г) и д). 149. а) $(0; 4)$. 150. а) $(-1; 5)$. 151. а) Все значения x, кроме $x=3$. 152. а) Все значения x, кроме $x=1$. 153. а) $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup [1; \infty)$. 154. а) $(1; 2)$. 155. а) $\left[-\frac{4}{3}; 3\right]$. 156. а) $(1; 2)$. 157. а) $(-3; 2)$. 158. а) $[1; 4)$. 159. а) $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup [1; \infty)$. 160. а) $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (1; \infty)$. 161. а) $(-2; 3)$. 162. а) $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (3; \infty)$. 163. а) Дискриминант $D < 0$, вся парабола размещена над осью x. 164. а) $x^2-4x+4=(x-2)^2$, это выражение имеет положительные значения при всех $x \neq 2$. 165. а) $(-\infty; -3] \cup [5; \infty)$. 167. Только II. 169.* а) $(3; 3)$ и $(-3; -3)$. 170. а) $(4; 4)$ и $(-4; -4)$. 171. а) $(0; 0)$, $(1; 1)$. 172. а) $(2; 4)$. 173. а) ± 2, $\pm\sqrt{2}$. 174. $(-2; 0)$, $(-1; 0)$, $(1; 0)$, $(2; 0)$ и $(0; 4)$. 175. а) $(6; 8)$, $(6; -8)$. 176. а) $(2; -1)$, $(1; -2)$. 177. а) $\left(\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{20}{9}; \frac{1}{3}\right)$. 179. а) $(1{,}2; -1{,}6)$ и $(-0{,}7; 4{,}1)$. 180. а) $(3; 4)$. 181. а) $(4+\sqrt{10}; 4-\sqrt{10})$ и $(4-\sqrt{10}; 4+\sqrt{10})$. 182. а) $(0; \sqrt{90})$, $(9; 3)$ и $(-9; -3)$. 183. а) $(2; 4)$, $(4; 2)$, $(3+3\sqrt{2}; 3-3\sqrt{2})$ и $(3-3\sqrt{2}; 3+3\sqrt{2})$. 184. 6 м, 8 м. 185. 11 см, 60 см. 186. 35 см, 12 см. 187. $17\sqrt{2}$. 188. $\sqrt{2}$. 189. а) R; $[-1; \infty)$. 190. а) $(0; 9)$; в) $[0; 9)$. 191. $[-2; 4]$; $[-2; 2]$. 192. $[-3; 2]$. 193. а) Возрастающая; б) убывающая. 194. а) $(0; \infty)$; б) $(-\infty; 1]$. 195. а) $(-\infty; -2)$; б) $(-\infty; 1)$. 198. Функция $f(x)$ определена на R, $f(-x)=(-x)^4+3=x^4+3=f(x)$. Следовательно, функция $f(x)$ четная. 200. Покажите, что $f(-x)$ не равно тождественно ни $f(x)$, ни $-f(x)$. 202. а) Функция $y=x^8$ возрастает на $(0; \infty)$ и $1{,}3 < 1{,}4$; потому $1{,}3^8 < 1{,}4^8$. 203. а) 1 решение; в) 3 решения; г) 2 решения. Постройте схематические графики соответствующих функций. 204. 1, 4, 9, 16, ..., n^2. 205. 1, 8, 27, ..., n^3. 206. 3, 6, 9, 12, ...; $a_{40}=120$. 207. 99, 399, 9999. 208. 64, 256, 1024. 209. Верно: $5n-3=5(n-1)+2$. 210. $a_n=7n-4$. 211. 7, 9, 11, 13, 15, ... 212. 5, 2, -1, -4, ... 213. $a_2=-2$, $a_5=7$. 214. $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8, 16, 32. 215. а) $a_n=3n-1$; б) $a_n=3\cdot 2^{n-1}$. 216. 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123. 217. $a_n=(-1)^{n-1}$. 218. $a_n=2n-1$, $b_n=2n-1+(n-1)\times$ $\times(n-2)(n-3)(n-4)$. 219. а) Нет; б) нет. 220. а) 2, 7, 12, 17, 22, 27, 32. 221. 65, 133. 222. 102, 212. 223. 20, 20,5. 224. а) 30. 225. а) $2+3(n-1)$. 226. а) 16. 227. Последовательности а) и б) — ариф-

*В задачах 169 –183 записи в скобках означают пары чисел.

метические прогрессии. 229. 5050. 230. 10 000. 231. а) 1088. 232. а) 3980. 234. а) 166833. 235. а) Найдите сумму 31+32+...+70. 236. $0{,}5n(n+1)$. 237. $a_{k-1}+a_{k+1}=a_1+d(k-2)+a_1+dk=2(a_1+d(k-1))=2a_k$. 238. 1680 грн. 239. 18. 240. $A_3B_3=7{,}5$ см, $A_nB_n=2{,}5n$ см. 241. ≈314 м. 242. 10 с. 243. Рассмотрите прогрессию $a-2d$, $a-d$, a, $a+d$, $a+2d$, сумма членов которой $180°(5-2)$. 244. 3,5 $|a-b|$. 245. а) Нет; б) нет. 246. а) 1, 3, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5, 3^6. 247. а) 6^{11}. 248. $b_n=3^n$. 249. а) Да. 250. $(b_1q^{k+1})^2=b_1q^k\cdot b_1q^{k+2}$. 251. Да. 252. $\sqrt{3}:2$. 253. Да; знаменатель прогрессии 0,5. 254. ≈455 мм рт. ст. 255. а) 32767; в) 10923. 256. а) 254. 257. а) 511. 259. $P_n=b_1^n q^{\frac{1}{2}n(n-1)}$. 260. Более 10 000 руб. 261. Так много зерна не было на всей планете. 262. $\approx 2^{72}$ бактерий. 263. 2^{65}, а это намного больше, чем всех людей на Земле. 264. а) $\frac{40}{41}$; б) $\frac{120}{121}$; покажите, что $\frac{3}{1\cdot 2}=1-\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4\cdot 7}=\frac{1}{4}-\frac{1}{7}$ и т. д. 265. а) $\frac{2n}{2n+1}$, покажите, что $\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}$; б) $\frac{n}{6n+4}$; г) $\sqrt{n+1}-1$, покажите, что $\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$; е) $1+5+9+\ldots+(4n+1)=2n^2+3n+1$. 267. а) 1,5; г) $-0{,}25$. 268. а) 1,25; г) $\frac{1}{1+x}$ при $|x|<1$. 269. $1\frac{1}{3}$. 270. а) $3{,}333\ldots=\frac{10}{3}$. 272. а) $2+\sqrt{2}$; в) $1:(4-\pi)$. 273. 6 см. 274. $6\sqrt{3}r$, $4\pi r$. 276. 6. 277. Нужно найти объем прямоугольного параллелепипеда данных размеров. 278. Найти площадь круга, радиус которого 8 м. 279. Найдите сумму длин 12 окружностей, диаметр каждой из которых равен 24 см. 280. Найти сумму десяти членов арифметической прогрессии, первый член которой равен 105, а разность 9. 281. Решить систему уравнений $x+y=90$ и $y=0{,}88x$. 282. Решить систему уравнений $0{,}1x+0{,}15y=0{,}12\cdot 40$ и $x+y=40$. 284. Решить уравнение $\frac{1}{x}=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$. Это – общая модель для трех данных задач. 285. $\frac{24}{12+x}+\frac{20}{12-x}=4$. 287. $(2v)^2+(2v+12)^2=60^2$. 288. Найти значение v, удовлетворяющее системе уравнений $vt=18+18t$ и $v\left(t+\frac{1}{6}\right)=24+24\left(t+\frac{1}{6}\right)$. 289. а) 37,25; б) 0,026; в) 6548000. 290. $3{,}6<m<3{,}8$. 291. $m\approx 35$; граница абсолютной погрешности 1 мм. 292. 315 г; 5 г. 293. $\frac{1}{3000}$. 294. а) Да; б) нет. 295. В числе

2,325 три десятичных знака: 3, 2 и 5. И в числе 0,007 также три десятичных знака: 0, 0 и 7. **296.** В числе 1,005 четыре значащие цифры, а в числе 0,028 две: 2 и 8. **299.** $a+b=4,41\pm0,05$; $a-b=2,07\pm0,05$; $ab=3,79\pm0,13$; $\frac{a}{b}=2,77\pm0,09$. **300.** $\frac{m}{n}=1,865\pm$ $\pm0,015$. **303.** $x+y=31,20$; $x-y=12,54$; $xy=210,1$; $x:y=2,173$. **304.** Нет. **306.** а) 8,72. **309.** $(2\cdot10+3\cdot20+5\cdot20):50=3,6$. **310.** 50. **311.** а) Мода 6, медиана 6, среднее значение 5,3; б) мода 13, медиана 13,5, среднее значение 13,9. **312.** а) Мода 3,0 и 3,1, медиана 2,9, среднее значение $\approx2,57$. **315.** 700 г. **316.** 92%. **317.** 200 кг. **318.** $\approx8,3$ т. **319.** $\approx71\%$. **320.** 300 т и 200 т. **321.** 85%. **322.** На 50 %. **323.** 200 кг. **324.** ≈1633 т. **325.** 250 кг. **326.** На 20%. **327.** На 19%. **328.** Снизилась на 4%. **329.** Возрос на 50 %. **330.** Возросло на 25%. **331.** 56%. **332.** 0,6 кг и 0,4 кг. **333.** Уменьшилась вдвое. **334.** 8051 грн. **335.** Не меньше 2746 грн. **336.** Через 14,3 лет. **337.** В 44 679 раз. **339.** $\approx6,7$ кг. **340.** 300 г и 500 г. **342.** Возведите данные числа в квадрат. **343.** Покажите, что $\sqrt{9\pm4\sqrt{5}}=\sqrt{5}\pm2$. **344.** а) $2a^2+b^2+c^2-2ab-$ $-2ac=(a-b)^2+(a-c)^2$. **345.** а) $x^4+y^4-x^3y-xy^3=(x-y)(x^3-y^3)$, а числа $x-y$ и x^3-y^3 одинаковых знаков; б) $(x-1)^2+(x-2y)^2+(y-2)^2+$ $+1>0$. **348.** $x^2+(1-x)^2-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(2x-1)^2$. **350.** Наименьшее значение x, при котором выражение $\sqrt{x-6}$ имеет числовое значение, равно 6. Множество решений каждого неравенства $(6;\infty)$. **353.** $y=|x+\sqrt{2}|+|x-\sqrt{2}|$. **355.** 0, 2, 4, 3, 2; постройте график функции $y=|x^2-6x+5|$. **356.** а) $(-\infty;0]\cup[6;\infty)$; б) $(0;6)$; в) решений нет. **357.** $\frac{7}{16},\frac{9}{16},\ldots,\frac{25}{16}$. **360.** Влево. **361.** ≈16 дней. **362.** 3:4. **363.** $x=2\frac{7}{4}$; $y=2\frac{14}{4}$, $z=2\frac{21}{4}$. **364.** а) 71 071; б) 428 429. **365.** $a_1^n(q^{n^2}-1):(q^n-1)$. **366.** $q:(1-q)^2$. **367.** 6, $-3,\frac{3}{2},-\frac{3}{4},\ldots$. **368.** 1 или -2. **369.** Покажите, что при $a+c=2b$ разность третьего и второго трехчленов равна разности второго и первого. **370.** а) $a_n=1,5+(-1)^n0,5$; б) $a_n=(-1)^nn$. **371.** а) $\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$; б) $n^2(n+1)$. **372.** Да; покажите, что $1+2^3+3^3+\ldots+n^3=n^2(n+1)^2:4$. **378.** 3, 7, 11, ...

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абсцисса 75
Алгебра 3
Аргумент функции 167
Возведение в степень 23
Выборка 276
Вынесение за знак корня 141
— — скобки 57
Выражения дробные 121
— иррациональные 121
— рациональные 21, 121
— с переменными 20
— целые 21
— числовые 20
Вычисление сумм 260
Вычитание дробей 109
— многочленов 38
Гипербола 181
Гистограмма 276
График уравнения 76, 236
— функции 172
Двучлен 34
Действия второй ступени 24
— первой ступени 24
Деление дробей 119
— одночленов 99
— степеней 98
Дискриминант 150
Доказательство неравенств 215
Допустимые значения 102
Дроби 101
— бесконечные периодические 132
— обыкновенные 102
Знаки десятичные 272
— неравенства 198
Знаменатель геометрической прогрессии 255
— дроби 101
Значащие цифры 272
Квадрат двучлена 52
— числа 24
Квадратный корень 129
— — арифметический 129
— — из дроби 137
— — из произведения 136
— — из степени 138
Координатная плоскость 75
Координаты точки 75
Корень уравнения 3
Коэффициент 31
Куб двучлена 55
Массовые явления 276
Математическая статистика 275
Математическое моделирование 276
Медиана выборки 277
Многочлен 34
— стандартного вида 35
Множество действительных чисел 133
— значений функции 220
Мода выборки 277
Начало координат 75
Неравенства 198
— квадратные 232
— равносильные 205
— с неизвестными 205
— числовые 199
Область определения функции 167
Общий множитель 57
Одночлен 31
— стандартного вида 31
Ордината точки 75
Оси координат 75
Основание степени 24
Основное свойство дроби 105
— — степени 29
Ось абсцисс 75
— ординат 75
Парабола 184
Переменная зависимая 167
— независимая 167
Погрешность абсолютная 271
— приближения 272
Подобные члены 35
Показатель степени 24
Порядок действий 24
Последовательность 247
— возрастающая, убывающая 248
Правила подсчета цифр 273
Преобразование выражений с корнями 140
— — рациональных 121

— графиков 224
Приближенные вычисления 271
Приведение подобных членов 35
Прикладные задачи 267
Прогрессия арифметическая 250
— геометрическая 255
Промежутки 206
Пропорциональность обратная 180
— прямая 178
Процентные деньги 280
Проценты 279
Равносильные неравенства 205
— уравнения 6, 73
Разложение многочлена 57
Разность квадратов 49
— кубов 62
— многочленов 38
— прогрессии арифметической 250
Рациональные выражения 121
— числа 132
Решение неравенства 205
— системы уравнений 79
— уравнения 3
— — с двумя переменными 72
Свойства неравенств 205
— — числовых 201
— степеней 28
— уравнений 7
— функций 241
Система неравенств 210
— уравнений 78
Сложение действительных чисел 134
— дробей 108
— многочленов 3
— одночленов 34
Сокращение дробей 106
Среднее арифметическое 216
— геометрическое 216
— значение выборки 277
Степень 23
Сумма действительных чисел 134
— кубов 62
— многочленов 38
— одночленов 34
Теорема Виета 162
Тождественные выражения 28
— преобразования выражений 28
Тождество 28, 103
Умножение дробей 115
— многочленов 44
— одночленов 31
— степеней 29
Уравнения 3
— биквадратные 238
— дробные 125
— квадратные 146
— — неполные 146
— линейные 10
— первой степени 11
— равносильные 6
Формула квадрата двучлена 53
— корней квадратного уравнения 150
— разности квадратов 49
— сложных процентов 280
— сокращенного умножения 49
Функция 167, 220
— возрастающая 173
— квадратичная 228
— линейная 176
— нечетная 242
— степенная 242
— убывающая 173
— четная 242
Числа действительные 133
— иррациональные 133
— натуральные 133
— рациональные 132
— целые 133
Числитель дроби 101
Члены дроби 101
— последовательности 247
— уравнения 4

СОДЕРЖАНИЕ

7 КЛАСС

Глава I. Уравнения

§ 1. Общие сведения об уравнениях 3
§ 2. Равносильные уравнения 6
§ 3. Линейные уравнения 10
§ 4. Решение задач с помощью уравнений 14
Задания для самостоятельной работы 19

Глава II. Целые выражения

§ 5. Выражения с переменными 20
§ 6. Выражения со степенями 23
§ 7. Тождественные выражения 28
§ 8. Одночлены 31
Задания для самостоятельной работы 33
§ 9. Многочлены 34
§ 10. Сложение и вычитание многочленов 38
§ 11. Умножение многочлена на одночлен 41
§ 12. Умножение многочленов 44
Задания для самостоятельной работы 48
§ 13. Разность квадратов 49
§ 14. Квадрат двучлена 52
Задания для самостоятельной работы 56

Глава III. Разложение многочленов на множители

§ 15. Вынесение общего множителя за скобки 57
§ 16. Способ группировки 59
§ 17. Использование формул сокращенного умножения 61
§ 18. Разность и сумма кубов 62
§ 19. Применение нескольких способов 65
§ 20. Зачем преобразовывать выражения 67
Задания для самостоятельной работы 70

Глава IV. Системы линейных уравнений

§ 21. Уравнения с двумя переменными 72
§ 22. График линейного уравнения с двумя переменными 74
§ 23. Системы уравнений 78
§ 24. Способ подстановки 81

§ 25. Способ сложения 85
§ 26. Решение задач составлением системы уравнений 87
Задания для самостоятельной работы 91
Задания для самостоятельной работы (итоговой) 92
Задачи повышенной трудности 93
Контрольные вопросы 95

8 КЛАСС

Глава V. Рациональные выражения

§ 27. Деление степеней и одночленов 98
§ 28. Деление и дроби 101
§ 29. Основное свойство дроби 105
§ 30. Сложение и вычитание дробей 108
Задания для самостоятельной работы 114
§ 31. Умножение дробей 115
§ 32. Деление дробей 119
§ 33. Преобразование рациональных выражений 121
§ 34. Дробные уравнения 124
Задания для самостоятельной работы 128

Глава VI. Квадратные корни и действительные числа

§ 35. Квадратные корни 129
§ 36. Действительные числа 132
§ 37. Квадратный корень из произведения, дроби, степени 136
§ 38. Преобразование выражений с корнями 140
Задания для самостоятельной работы 144

Глава VII. Квадратные уравнения

§ 39. Неполные квадратные уравнения 146
§ 40. Формула корней квадратного уравнения 150
§ 41. Решение задач составлением квадратных уравнений 156
§ 42. Теорема Виета 162
Задания для самостоятельной работы 165

Глава VIII. Функции

§ 43. Что такое функция? 167
§ 44. График функции 171
§ 45. Линейная функция 176
§ 46. Обратная пропорциональность 180
§ 47. Функции $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$ 184
Задания для самостоятельной работы 188
Задания для самостоятельной работы (итоговой) 189
Задачи повышенной трудности 191
Контрольные вопросы 196

9 КЛАСС

Глава IX. Неравенства

§ 48. Общие сведения 198
§ 49. Свойства числовых неравенств 201
§ 50. Решение неравенств с одной переменной 204
§ 51. Системы неравенств с одной переменной 210
§ 52. Доказательство неравенств 215
Задания для самостоятельной работы 218

Глава X. Функции и графики

§ 53. Функции 220
§ 54. Преобразование графиков функций 224
§ 55. Квадратичная функция 228
§ 56. Графики функций и неравенства 232
§ 57. Графическое решение систем уравнений 236
§ 58. Свойства функций 241
Задания для самостоятельной работы 245

Глава XI. Числовые последовательности

§ 59. Последовательность 247
§ 60. Арифметическая прогрессия 250
§ 61. Геометрическая прогрессия 255
§ 62. Задачи на вычисление сумм 260
Задания для самостоятельной работы 265

Глава XII. Элементы прикладной математики

§ 63. Математическое моделирование 267
§ 64. Приближенные вычисления 271
§ 65. Первые сведения о статистике 275
§ 66. Процентные расчеты 279
Задания для самостоятельной работы 283
Задания для самостоятельной работы (итоговой) 284
Задачи повышенной трудности 286
Контрольные вопросы 290
Приложение. Исторические сведения 293
Таблица квадратов натуральных чисел от 10 до 99 300
Ответы и указания к упражнениям 301
Предметный указатель 315

Навчальне видання

БЕВЗ ГРИГОРІЙ ПЕТРОВИЧ

АЛГЕБРА

Пробний підручник для 7— 9 класів

Допущено Міністерством освіти України

Переклад з української

Завідуючий редакцією природничо-математичного циклу
М. Ю. Зубченко.
Редактор *С. А. Попадюк.*
Художник обкладинки *О. В. Пермяков.*
Художній редактор *Н. О. Костинська.*
Технічний редактор *Г. Г. Саливон.*
Коректори *Л. С. Бобир, Г. А. Зацерковна.*

Здано до набору 4.02.97. Підписано до друку 11.07.97. Формат 84x108/32. Папір друк
Гарнітура шкільна. Друк високий. Умовн. друк. арк. 16,8. Умовн. фарбо-відб. 17,22.
Обл.-вид. арк. 16,48. Тираж 320 000 прим. (2-й з-д 120 001—220 000 прим.). Вид. № 3596
Замовлення № 7-228. Ціна 1 грн. 35 к.

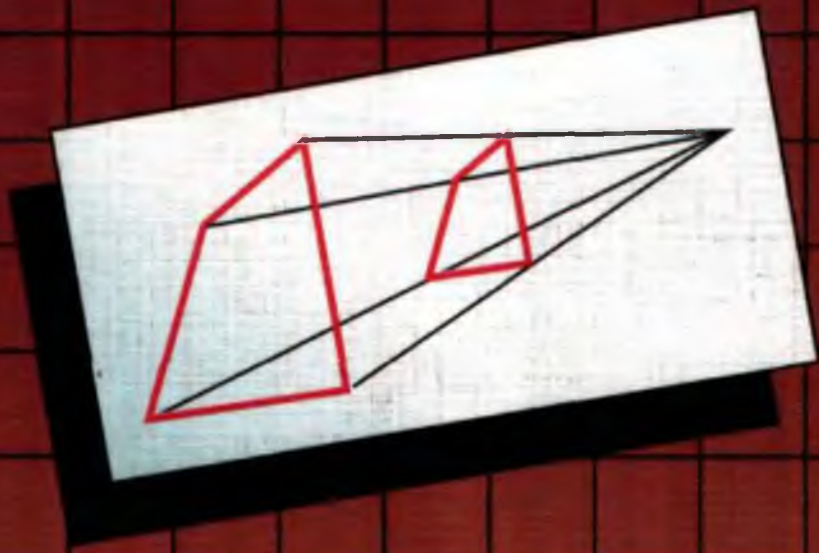
Видавництво «Освіта». 254053, Київ, Ю. Коцюбинського, 5.

Свідоцтво 22858060 від 28.10.94.

Набір та верстка комп'ютерного центру видавництва «Освіта»

Книжкова фабрика ім. М. В. Фрунзе.
310057, Харків, Донець-Захаржевського, 6/8.

Алгебра



ВИДАВНИЦТВО ОСВІТА

ISBN 966-04-0107-8

9 789660 401075 >